EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

$ay'' + by' + cy = f(x)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è una funzione, y incognita.

1) se $f(x) = 0$ OMOGENEA

$ay'' + by' + cy = 0$

EQUAZIONE CARATTERISTICA $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$ (*)

- se $\Delta > 0$ (r_1 ed r_2 soluzioni di (*)), l'integrale generale è:

$$\boxed{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

- se $\Delta = 0$ (r è soluzione doppia di (*)) e l'integrale generale è:

$$\boxed{y = e^{rx}(c_1 + c_2 x)}$$

- se $\Delta < 0$ (le soluzioni sono complesse coniugate: $r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$), l'integrale generale è:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)}$$

2) $f(x) \neq 0$ NON OMOGENEA

l'equazione è: $ay'' + by' + cy = f(x)$ (**)

l'integrale generale di (**) si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea $ay'' + by' + cy = 0$ un integrale particolare dell'equazione originaria.

ESEMPIO

$$y'' - 2y' + y = x^2$$

- Trovo le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 2y' + y = 0$
- l'equazione caratteristica è $r^2 - 2r + 1 = 0$ le cui soluzioni sono $r = 1$ contato 2 volte. $r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1}}{1} = 1$
- La soluzione generale è $y = e^{1x}(c_1 + c_2 x)$
- Ora trovo l'integrale particolare: al secondo membro ho $y = x^2$; siccome $x = 0$ non è soluzione dell'equazione CARATTERISTICA, cerco un integrale particolare definito da un polinomio di 2° grado:

$$g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Mi calcolo $g'(x)$, $g''(x)$ e sostituisco nell'equazione di partenza:

$$g'(x) = 2Ax + B \quad ; \quad g''(x) = 2A$$

$$\underbrace{2A}_{y''} - 2\underbrace{(2Ax + B)}_{y'} + \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y} = \underbrace{x^2}_{f(x)}$$

$$Ax^2 + (B - 4A)x + 2A - 2B + C = x^2$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -4A + B = 0 \\ 2A - 2B + C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ C = 6 \end{cases} \qquad g(x) = 1x^2 + 4x + 6$$

L'integrale generale è $y = e^x(c_1 + c_2 x) + x^2 + 4x + 6$

ESEMPIO

$$y'' - 9y = e^{3x}$$

Trovo l'integrale generale dell'omogenea $y'' - 9y = 0$
L'equazione caratteristica: $r^2 - 9 = 0$ $r_1 = 3$ $r_2 = -3$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

$f(x) = e^{3x}$

- Trovo l'integrale particolare: siccome 3 è soluzione dell'equazione caratteristica cerchiamo un integrale particolare del tipo:

$$g(x) = Axe^{3x}$$

$$g'(x) = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} \qquad g''(x) = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$$

$$\underbrace{3Ae^{3x}(2 + 3x)}_{y''} - 9\underbrace{(Axe^{3x})}_{y} = \underbrace{e^{3x}}_{f(x)}$$

$$A = \frac{1}{6} \qquad g(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}xe^{3x}$$

$$a y'' + b y' + c y = f(x)$$

se	si cerca un integrale particolare del tipo:
$f(x)$ è polinomio di grado n	• $g(x) = P_n(x)$, se 0 non è radice dell'equazione caratteristica • $g(x) = x P_n(x)$, se 0 è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità 1 • $g(x) = x^2 P_n(x)$ se 0 è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità 2.
$f(x) = h e^{kx}$	• $g(x) = A e^{kx}$ se K non è radice dell'equazione caratteristica • $g(x) = A x e^{kx}$ se K è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità 1. • $g(x) = A x^2 e^{kx}$ se K è radice dell'equazione caratteristica con molteplicità 2.
$f(x) = h \operatorname{sen} Kx$ oppure $f(x) = h \cos Kx$	• $g(x) = A \operatorname{sen} Kx + B \cos Kx$ se $\pm iK$ non sono radici complesse dell'equazione caratteristica • $g(x) = x(A \operatorname{sen} Kx + B \cos Kx)$ se $\pm iK$ sono radici complesse dell'equazione caratteristica