Forma cartesiana

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Posizioni relative di due piani

$\alpha : ax+by+cz+d=0 \qquad \alpha' = a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases}$$

1. $\alpha \equiv \alpha'$ se i coefficienti sono proporzionali ovvero:

   $a_1=ka \quad b_1=kb \quad c_1=kc \quad d_1=kd \qquad k \in \mathbb{R}$

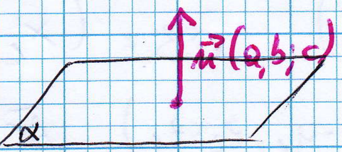
2. $\alpha \parallel \alpha'$ se i coefficienti sono proporzionali tranne il termine noto ovvero:

   $a_1=ka \quad b_1=kb \quad c_1=kc \quad d_1 \neq kd$

3. $\alpha \cap \alpha' \neq \emptyset$ i due piani sono secanti quindi a, b, c e a_1, b_1, c_1 non sono proporzionali e il sistema ha infinite soluzioni.

Vettore ⊥ ad un piano

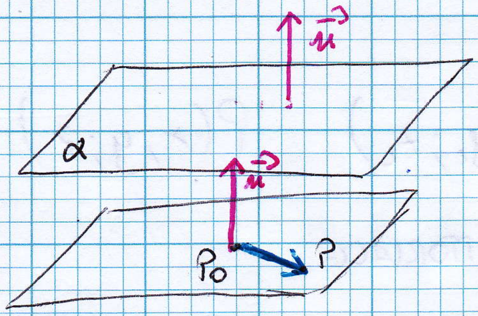
Dato il piano $ax+by+cz+d=0$, il vettore perpendicolare al piano α è $\vec{n}(a;b;c)$



Piano per un punto e ∥ a un piano

Dato un piano $\alpha : ax+by+cz+d=0$, il piano passante per $P_0(x_0;y_0;z_0)$ e $\parallel$ ad α è il luogo dei punti P tali che $\overrightarrow{P_0P}$ è $\perp$ a $\vec{n}(a;b;c)$ ovvero $\overrightarrow{P_0P} \times \vec{n} = 0$

quindi: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$



ESEMPI

Determina l'equazione del piano che passa per $A(-1;0;5)$ $B(4;1;1)$ $C(0;0;2)$

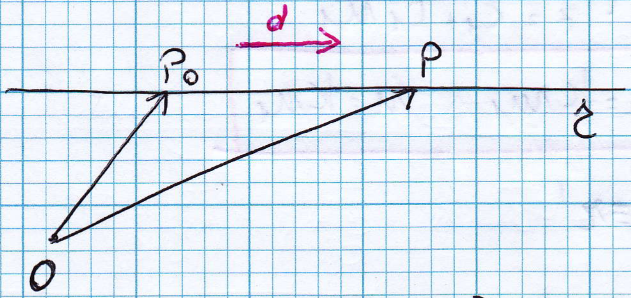
$\overline{AB} = (5, 1, -4) \qquad \overline{AC} = (1, 0, -3)$

$$\begin{cases} x = -1 + 5\lambda + \mu \\ y = 0 + \lambda \\ z = 5 - 4\lambda - 3\mu \end{cases} \iff \begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 \\ 5 & 1 & -4 \\ +1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia } 3x - 11y + z - 2 = 0$$

RETTA PER UN PUNTO // A UNA DIREZIONE DATA

$\vec{d}$ direzione, P_0 punto

$$r: \boxed{\overline{OP} = \overline{OP_0} + t\vec{d}} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$



Forma parametrica

$\vec{d}(l; m; n)$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Forma cartesiana

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}$$

RETTA PER DUE PUNTI

$P_1(x_1;y_1;z_1)$ $P_2(x_2;y_2;z_2)$ $P(x;y;z)$

$\overline{OP} = \overline{OP_1} + t\,\overline{P_1P_2}$ ← VETTORIALE

$$r \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$ ← PARAMETRICA.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ ← CARTESIANA.

POSIZIONI DI DUE RETTE

- COMPLANARI → o sono incidenti → o sono parallele
- SGHEMBE → non hanno punti in comune.

$$r: \begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \\ z = c + nt \end{cases} \qquad r' = \begin{cases} x = a_1 + t_1 l_1 \\ y = b_1 + t_1 m_1 \\ z = c_1 + t_1 n_1 \end{cases}$$

$\boxed{r // r' \text{ se } \quad l = k l_1 \quad m = k m_1 \quad n = k n_1}$

se $(a;b;c) \in r'$ allora $r \equiv r'$

- se (l,m,n) e $(l_1;m_1;n_1)$ non sono paralleli allora le due rette possono avere un solo punto in comune o nessuno a seconda che i vettori

$\vec{d} = (l;m;n)$ e $\vec{d'} = (l_1;m_1;n_1)$ $\overline{P_0P_0'} = (a_1-a;b_1-b;c_1-c)$

siano complanari o non complanari.

Ovvero se $\boxed{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ a_1-a & b_1-b & c_1-c \end{vmatrix} = 0}$ rette incidenti

$r \cap r' \neq 0$

PERPENDICOLARITÀ TRA RETTE

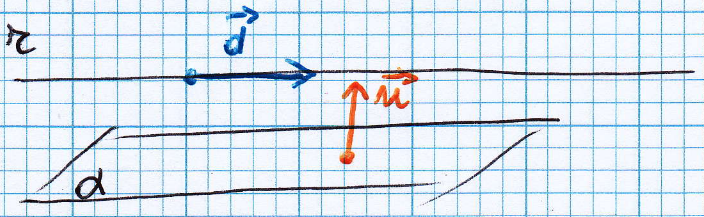
Due rette r ed r' sono perpendicolari se date le loro direzioni $\vec{d}(l;m;n)$ e $\vec{d'}(l';m';n')$ si ha che

$$\vec{d}\times\vec{d'}=0$$

ovvero

$$\boxed{ll'+mm'+nn'=0}$$

PARALLELISMO RETTA PIANO



$\vec{d}(l;m;n)$

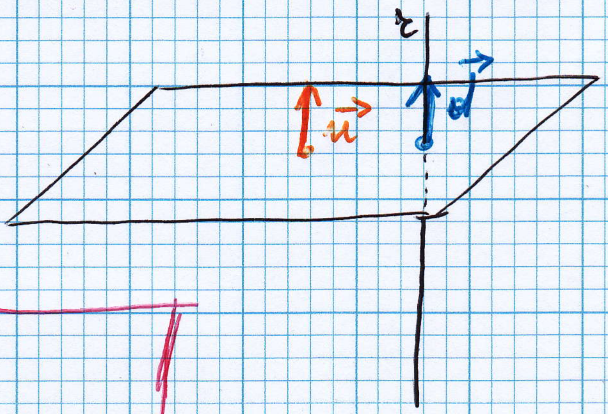
$\vec{n}(a;b;c)$

$$\vec{d}\times\vec{n}=0$$

ovvero

$$\boxed{al+bm+cn=0}$$

PERPENDICOLARITÀ TRA RETTA E PIANO



$\vec{d}(l;m;n)$

$\vec{n}(a;b;c)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} l=ka & \\ m=kb & k\in\mathbb{R} \\ n=kc & \end{array}}$$