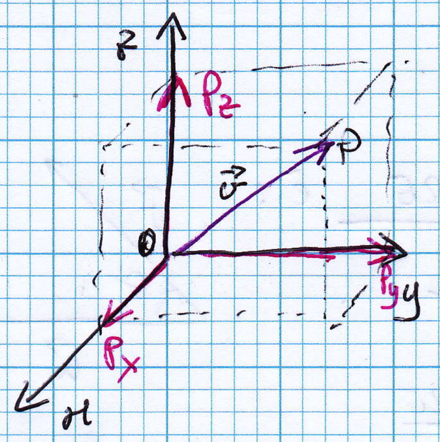
GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO



$\overrightarrow{OP_x} = x\vec{i}$

$\overrightarrow{OP_y} = y\vec{j}$ $\qquad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versori

$\overrightarrow{OP_z} = z\vec{k}$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{v} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{OP_y} + \overrightarrow{OP_z} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{i} = (1;0;0) \quad \vec{j} = (0;1;0) \quad \vec{k} = (0;0;1)$$

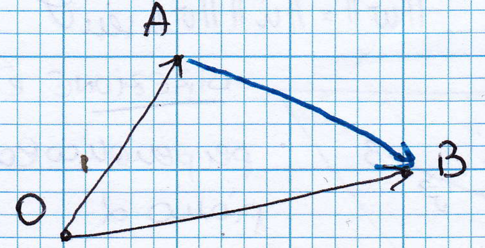
- MODULO VETTORE : $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- OPPOSTO VETTORE $-\vec{v} = (-x; -y; -z)$
- PRODOTTO PER UNO SCALARE $m\vec{v} = (mx; my; mz)$
- VERSORE $\vec{v}$: $\text{vers}\,\vec{v} = \left(\frac{x}{\|\vec{v}\|} ; \frac{y}{\|\vec{v}\|} ; \frac{z}{\|\vec{v}\|} \right)$
- SOMMA DI VETTORI

$$\vec{v_1} = (x_1; y_1; z_1) \qquad \vec{v_2} = (x_2; y_2; z_2)$$

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$$

- DIFFERENZA DI VETTORI

$$\vec{v_1} - \vec{v_2} = (x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2)$$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$A(x_1; y_1; z_1) \quad B(x_2; y_2; z_2)$

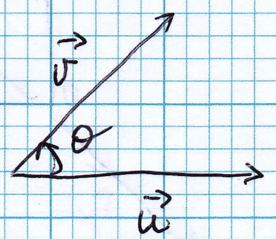
$\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

• PRODOTTO SCALARE

$\vec{v}, \vec{u}$ vettori: il PRODOTTO SCALARE è:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$



• ESPRESSIONE ANALITICA PRODOTTO SCALARE

Data la BASE ORTOGONALE $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ con $\vec{i}=(1;0;0)$ $\vec{j}=(0;1;0)$ $\vec{k}=(0;0;1)$ si ha $\vec{i}\times\vec{i}=1$ $\vec{j}\times\vec{j}=1$ $\vec{k}\times\vec{k}=1$ $\vec{i}\times\vec{j}=0$ $\vec{j}\times\vec{k}=0$ $\vec{i}\times\vec{k}=0$

Se $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1)$ $\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

• ANGOLO TRA DUE VETTORI

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

• DUE VETTORI SONO $\perp$ SE

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

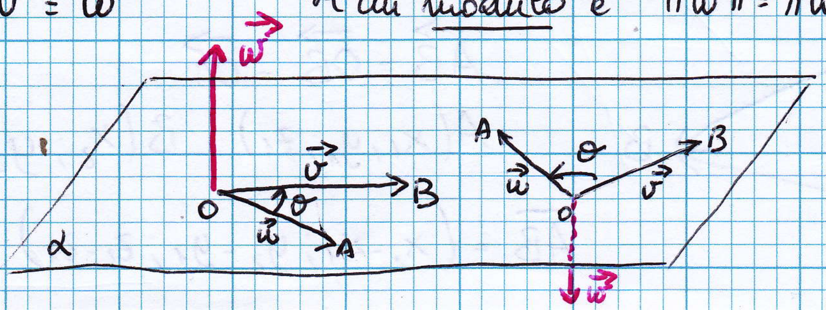
• PRODOTTO VETTORIALE

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori nel piano α e formanti un angolo θ

$0\leq\theta\leq\pi$

Il PRODOTTO VETTORIALE è:

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ Il cui modulo è $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\operatorname{sen}\theta$ e la DIREZIONE è quella perpendicolare al piano α



$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (y_1 z_1 - y_2 z_1)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

- AREA DI UN TRIANGOLO

$$\text{area}_{(AOB)} = \frac{1}{2} \| \vec{OA} \wedge \vec{OB} \|$$

ESEMPIO

Area triangolo ABC con $A(-1;0;1)$ $B(2;-1;-1)$ $C(0;1;-2)$

$$\text{area} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \|$$

$$\vec{AB} = \overset{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A}{(3; -1; -2)} \qquad \vec{AC} = (1; 1; -3)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(3+2) + \vec{j}(-2+9) + \vec{k}(3+1) =$$

$$= 5\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{25+49+16} = 3\sqrt{10}$$

$$\text{area} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

- DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE DI VETTORI

Tre vettori sono linearmente dipendenti se:

$\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$ $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$ $\vec{w}(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

determinante uguale a zero.

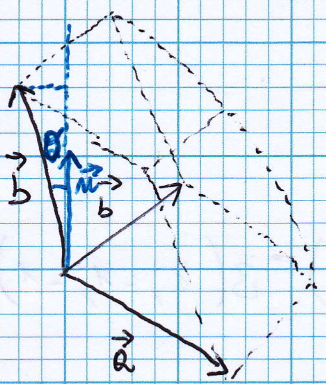
$$x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3 = 0$$

- Se tale condizione non si verifica i tre vettori sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

• PRODOTTO MISTO

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \;:\quad \overbrace{(\vec{a} \wedge \vec{b})}^{\vec{u}} \times \vec{c} = \vec{u} \times \vec{c} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos\vartheta$$

$(\vec{a} \wedge \vec{b})$ ↑ vettore, $\times \vec{c}$ ↑ scalare



$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c}$ è il volume del parallelepipedo considerato

• ESPRESSIONE ANALITICA DI $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c}$ è:

$a(a_1; a_2; a_3) \quad b(b_1; b_2; b_3) \quad c(c_1; c_2; c_3)$

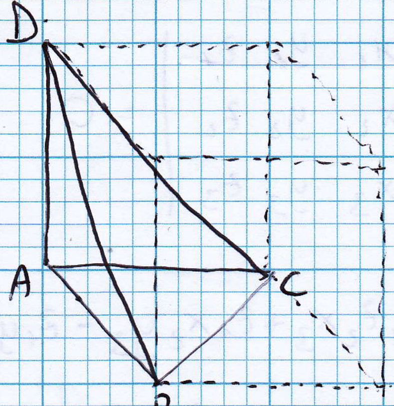
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2 b_3 - a_3 b_2) + j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

APPLICAZIONI:

Volume del Tetraedro:



$A(a_1; a_2; a_3) \quad B(b_1; b_2; b_3)$

$C(c_1; c_2; c_3) \quad D(d_1; d_2; d_3)$

$\vec{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$

$\vec{AC} = (c_1 - a_1; c_2 - a_2; c_3 - a_3)$

$\vec{AD} = (d_1 - a_1; d_2 - a_2; d_3 - a_3)$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}$$

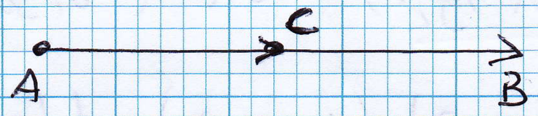
COMPLANARITÀ DI TRE VETTORI

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c} = 0$ i tre vettori sono complanari

PUNTI DI UN SEGMENTO

Dato il segmento AB sia $C(x;y;z)$ un punto di AB:

si ha $\vec{AC} = t\vec{AB}$ $\quad t \in [0,1]$



$A(x_1;y_1;z_1) \quad B(x_2;y_2;z_2)$

$C(x;y;z)$

$$\begin{cases} x-x_1 = t(x_2-x_1) \\ y-y_1 = t(y_2-y_1) \\ z-z_1 = t(z_2-z_1) \end{cases} \qquad C: \begin{cases} x = x_1+t(x_2-x_1) \\ y = y_1+t(y_2-y_1) \\ z = z_1+t(z_2-z_1) \end{cases}$$

se $t=0 \Rightarrow \vec{AC} = 0 \Rightarrow A \equiv C$

se $t=1 \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AB} \Rightarrow C \equiv B$

se $t=\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB} \Rightarrow$ C è il punto medio di $\overline{AB}$