

Def.

Sia $\bar{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$, è detta FUNZIONE INTEGRALE
di $y=f(x)$ che è detta FUNZIONE INTEGRANDA

TEOREMA DI TORRICELLI - BARROW

Sia $y=f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$. La funzione integrale $\bar{F}(x) = \int_a^x f(t) dt$ è derivabile per ogni $x \in [a,b]$ e

$$\bar{F}'(x) = f(x) \quad \text{e} \quad \bar{F}(a) = 0$$

Dim.

Consideriamo in $[a,b]$ due punti x e $x+h$. Prendiamo il rapporto incrementale per $y=\bar{F}(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{F}(x)}{\Delta x} &= \frac{\bar{F}(x+h) - \bar{F}(x)}{(x+h) - x} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} \\ &= \frac{\int_a^x \cancel{f(t)} dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x \cancel{f(t)} dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

Per il Teorema della media $\exists c \in [x, x+h]$ tale che

$$f(c) = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \Rightarrow h f(c) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

$$f(c) = \frac{\Delta \bar{F}(x)}{\Delta x} \Rightarrow \bar{F}'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

$$\bar{F}'(x) = f(x)$$

$$\bar{F}(a) = 0 \Rightarrow \bar{F}(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{C.V.D.}$$

ESEMPIO

Studiare la funzione $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$; $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^{-x^2}$, $a=0$ e $f(x)$ è pari quindi $F(x)$ è dispari

$F(x) > 0$ per $x > 0$

$F(x) < 0$ per $x < 0$

$F(x)$ - 0 +

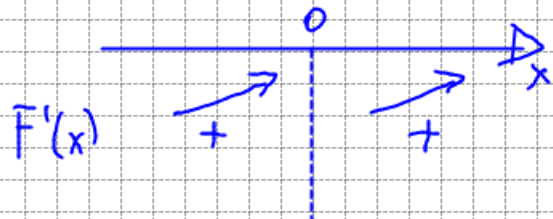


Per il teorema di Torricelli-Borrows si ha che

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

$F'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$$



$$F''(x) = -2xe^{-x^2}$$

$F''(x)$

+ U - ∩

