

TEOREMA DELLA MEDIA

Se $y=f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$, esiste almeno un punto $c \in [a,b]$ tale che:

valor medio $f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

Dim

Indichiamo con $m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$ in $[a,b]$, quindi $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

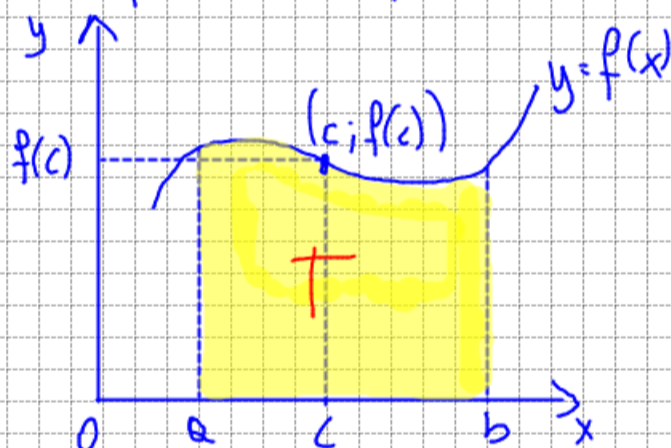
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} \leq M$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ è un numero compreso tra m (minimo) e

M (massimo) di $f(x)$ in $[a,b]$ allora per il Teorema dei valori intermedi esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

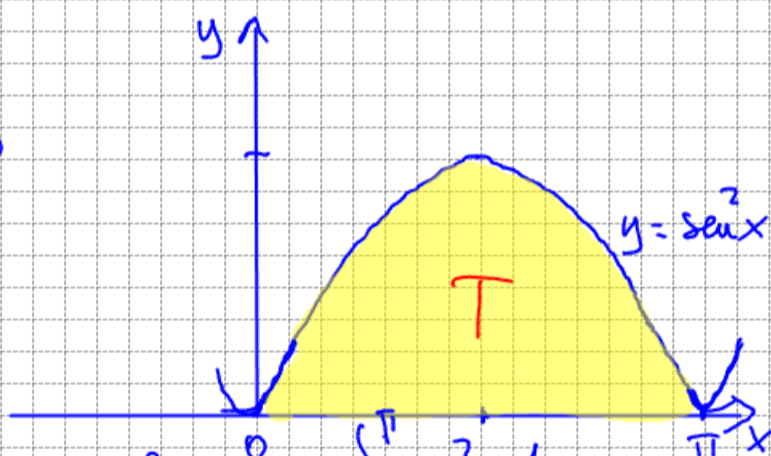
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$



ESEMPIO

$$f(x): y = \sin^2 x \quad [0; \pi]$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx =$$



$$\exists c \in [0; \pi] \text{ tale che } f(c) = \frac{\int_0^{\pi} \sin^2 x dx}{\pi - 0} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \sin^2 c$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi \sin^2 c \Rightarrow \sin^2 c = \frac{1}{2} \quad \sin c = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c = \frac{\pi}{4} \text{ e } c = \frac{3\pi}{4}$$