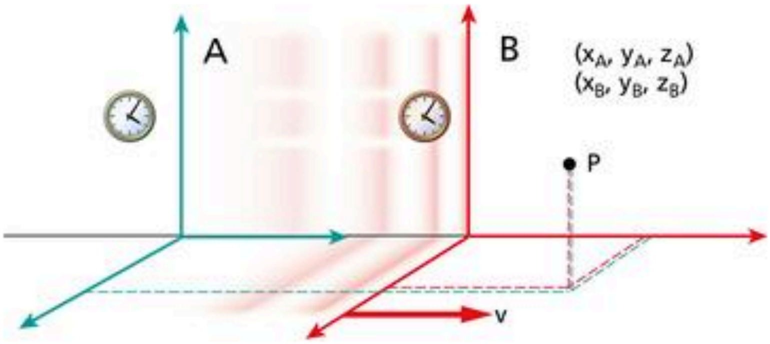
4 Conseguenze dei postulati di Einstein: le trasforr Lorentz

Le trasformazioni di Galileo

Consideriamo due sistemi di riferimento A e B con le seguenti caratteristiche:

- l'osservatore in A esprime la posizione di un punto a un dato istante, misurato con il suo orologio, con le coordinate (x_A, y_A, z_A, t_A); in modo analogo B utilizza (x_B, y_B, z_B, t_B);
- all'istante $t_A = t_B = 0$ i due sistemi di coordinate coincidono;
- A vede B allontanarsi a velocità costante v lungo x_A nel verso positivo, mentre B vede A allontanarsi nel verso negativo dell'asse x_B.



Nella dinamica newtoniana, le coordinate del punto P nei sistemi A e B sono legate dalle seguenti relazioni, **dette trasformazioni di Galileo**:

$$x_B = x_A - vt_A \qquad y_B = y_A \qquad z_B = z_A \qquad t_B = t_A \tag{3}$$

DENTRO LA FORMULA

- Le trasformazioni (3) derivano in particolare dal fatto che nella fisica newtoniana il tempo è considerato assoluto ($t_A = t_B$) e che la distanza fra le origini di A e B cresce come vt;
- la trasformazione inversa, che esprime le coordinate di P nel sistema A a partire da quelle nel sistema B, si ottengono mediante la sostituzione $v \rightarrow -v$.

$$x_A = x_B + vt_B \qquad y_A = y_B \qquad z_A = z_B \qquad t_A = t_B \tag{4}$$

Le trasformazioni di Lorentz

I principi della relatività implicano che le trasformazioni fra sistemi inerziali non possono essere quelle galileiane, perché i tempi misurati da due sistemi in moto relativo non sono uguali.

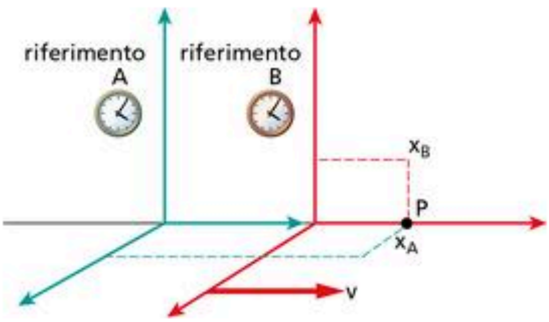
Per determinare le nuove trasformazioni, cominciamo a dimostrare che le coordinate y e z lungo direzioni perpendicolari al moto relativo dei due sistemi rimangono invariate. Supponiamo che possa verificarsi un allungamento o un accorciamento delle lunghezze lungo una di queste coordinate: per esempio potrebbe accadere che $y_A = k \cdot y_B$, dove k è una costante che dipende dalla velocità relativa tra i due sistemi. Ma la relazione inversa $y_B = 1/k \cdot y_A$ porterebbe a una non-equivalenza nei due sistemi:

- un oggetto alto 1 m, posto lungo l'asse y del sistema B e che si muove con B, risulterebbe essere alto k metri se misurato dal sistema A;
- se lo stesso oggetto fosse fermo nel sistema A, verrebbe misurato da B e risulterebbe alto $1/k$ metri.

Ciò non è possibile se tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti: A e B devono misurare la stessa lunghezza l'uno rispetto all'altro per cui deve essere $k = 1$.

Quindi le coordinate perpendicolari al moto non subiscono variazioni.

Invece la coordinata x nella direzione del moto si trasforma in modo particolare al passaggio da un riferimento all'altro.



Un punto P sull'asse x ha coordinata x_A nel sistema A e x_B nel sistema B.

La trasformazione di coordinate che cerchiamo deve essere simmetrica (a parte lo scambio di v con $-v$) in modo da non distinguere i due sistemi.

L'osservatore A vede l'origine del sistema di riferimento B più avanti di un tratto vt_A, mentre B vede l'origine del sistema A più indietro di un tratto $-vt_B$. Questi due fatti impongono di scrivere le trasformazioni della coordinata x come:

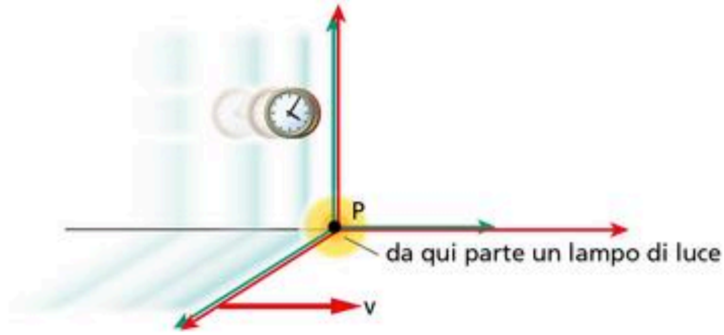
$$x_A = k \cdot (x_B + vt_B) \tag{5}$$

e

$$x_B = k \cdot (x_A - vt_A) \tag{6}$$

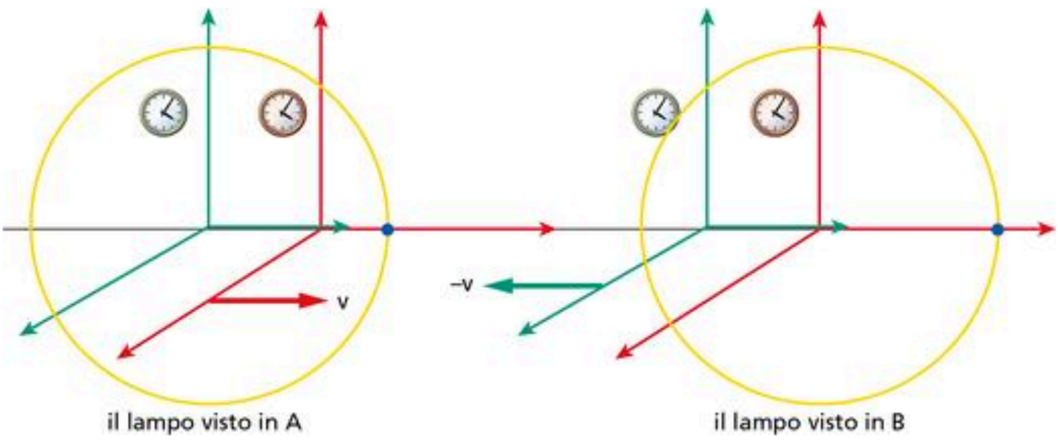
dove k è un fattore che può dipendere solo dal valore di v.

Per determinare k, utilizziamo il postulato della costanza di c. Le origini dei due sistemi coincidono quando $t_A = t_B = 0$: come si vede nel disegno sotto, in quell'istante viene emesso un lampo di luce da una sorgente nell'origine. Il fronte d'onda del lampo si propaga come una sfera sia nel sistema A che nel sistema B.



Per un osservatore in A la sfera è centrata nell'origine di A ed ha raggio ct_A. Un osservatore in B vede una sfera di raggio ct_B centrata nell'origine di B. Quando la sfera di luce raggiunge il punto blu, si ha

$$x_A = ct_A \qquad x_B = ct_B$$



Sostituiamo nelle equazioni (5) e (6):

$$ct_A = k \cdot (ct_B + vt_B) \qquad ct_B = k \cdot (ct_A - vt_A)$$

vale a dire

$$ct_A = k \cdot (c + v) \cdot t_B \qquad ct_B = k \cdot (c - v) \cdot t_A$$

Moltiplicando tra loro le due equazioni precedenti ricaviamo k:

$$c^2 = k^2 \cdot \left(c^2 - v^2\right) \rightarrow k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

Notiamo che $k = \gamma$ è lo stesso fattore incontrato nella dilatazione dei tempi. La coordinata nella direzione del moto relativo si trasforma quindi secondo le relazioni

$$x_A = \gamma \cdot (x_B + vt_B) \qquad x_B = \gamma \cdot (x_A - vt_A)$$

Con alcuni passaggi algebrici è possibile ricavare dalle relazioni precedenti le equazioni di trasformazione dei tempi

$$t_A = \gamma\left(t_B + \frac{v}{c^2}x_B\right) \qquad t_B = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right)$$

In definitiva, nella cinematica relativistica le coordinate di un punto nei sistemi inerziali A e B in moto relativo con velocità v lungo x sono legate dalle seguenti relazioni, dette **trasformazioni di Lorentz**:

$$x_B = \gamma(x_A - vt_A) \quad y_B = y_A \quad z_B = z_A \quad t_B = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) \tag{7}$$

DENTRO LA FORMULA

- La trasformazione inversa, che esprime le coordinate di P nel sistema A a partire da quelle nel sistema B, si ottengono mediante la sostituzione $v \rightarrow -v$:

$$x_A = \gamma(x_B + vt_B) \quad y_A = y_B \quad z_A = z_B \quad t_A = \gamma\left(t_B + \frac{v}{c^2}x_B\right) \tag{8}$$

Se la velocità relativa è piccola rispetto a c allora $\gamma \sim 1$. Se inoltre si considerano sistemi non troppo estesi, in modo che i termini $(v/c^2)\, x_A$ e $(v/c^2)\, x_B$ si possano trascurare, allora $t_A \sim t_B = t$: il tempo è lo stesso per entrambi gli osservatori e le trasformazioni (7) e (8) diventano le trasformazioni galileiane della meccanica di Newton. Va però notato che, anche se v è piccola, eventi molto lontani accadono in tempi diversi per osservatori in moto relativo.

ESEMPIO

Due amici si vengono incontro a 3 m/s. Su un pianeta distante 1000 anni-luce una meteorite colpisce il suolo.

Qual è la differenza tra il tempo in cui accade questo evento per un amico e per l'altro? Con v = 3 m/s si ottiene $\gamma = 1$ a meno di $5 \cdot 10^{-17}$. Però se x_A = 1000 anni-luce = $(3 \cdot 10^{10}$ s$)c$, allora

$$\frac{v}{c^2}\, x_A = \frac{(3\text{m/s})\left(3 \cdot 10^{10}\text{s}\right)\left(3 \cdot 10^{8}\text{m/s}\right)}{\left(3 \cdot 10^{8}\text{m/s}\right)^2} = 3 \cdot 10^2\text{s} = 5\ \text{min}$$

Simultaneità

Nella cinematica relativistica la simultaneità di due eventi non è assoluta ma dipende dal sistema di riferimento. Consideriamo per esempio due eventi 1 e 2 che avvengono simultaneamente in un sistema di riferimento A in quiete rispetto a essi. L'intervallo di tempo fra essi misurato in A è nullo: $\Delta t_A = t_{2A} - t_{1A} = 0$.

Osservati in un sistema di riferimento B in moto relativo rispetto ad A con velocità costante v, i due eventi risultano separati da un intervallo di tempo $\Delta t_B = t_{2B} - t_{1B}$ che per la relazione (7) è

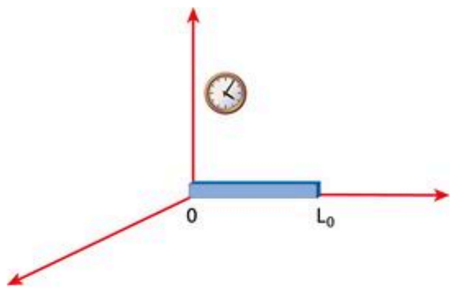
$$\Delta t_B = -\gamma\, \frac{v}{c^2}\, \Delta x_A$$

I due eventi sono simultanei in B solo se avvengono nello stesso punto ($\Delta x_A = 0$): la simultaneità è quindi relativa al sistema di riferimento in cui si osservano gli eventi.

5 La contrazione delle lunghezze

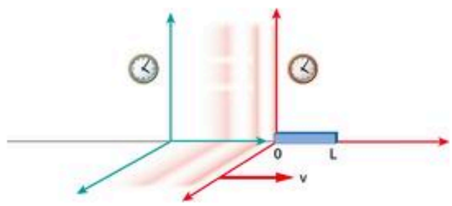
Una conseguenza della costanza di c è che gli oggetti in movimento nella direzione del moto si accorciano, sia in avvicinamento che in allontanamento.

1 Consideriamo una barra. Misurata nel sistema di riferimento B in cui è ferma ha una lunghezza detta **lunghezza propria** L_0.
Appoggiamo questa barra lungo l'asse x del sistema B con un estremo nell'origine. L'altro estremo occupa la posizione $x_B = L_0$.



2 Il sistema B si muove con velocità v rispetto al sistema A. Per misurare la lunghezza della sbarra nel sistema A, bisogna determinare la posizione dei due estremi della barra nello stesso istante t_A.

Se l'osservatore in A prendesse le coordinate in istanti diversi non misurerebbe la lunghezza della sbarra, perché questa si sta spostando rispetto a lui.



Consideriamo la relazione (7) tra le coordinate nei due sistemi in un dato istante di tempo t_A dell'osservatore A e applichiamola ai due estremi della barra:

- *estremo nell'origine di B* ($x_B = 0$): $0 = \gamma\,(x_{A0} - v \cdot t_A) \rightarrow x_{A0} = v\, t_A$
- *estremo in* $x_B = L_0$: $L_0 = \gamma\,(x_{1A} - v \cdot t_A) \rightarrow x_{1A} = L_0/\gamma + t_A$

La lunghezza L della barra vista in A all'istante t_A è la differenza delle coordinate dei due estremi:

$$L = x_{1A} - x_{0A} = L_0/\gamma + vt - = L_0/\gamma$$

Poiché $\gamma > 1$, $L < L_0$ e la barra appare più corta quando osservata in un sistema in moto relativo.

Sostituendo v con $-v$ il risultato non cambia: il moto della barra produce sempre un accorciamento nella direzione del moto, detto **contrazione di Lorentz.**

Al contrario, la dimensione di un oggetto non subisce alcuna deformazione nella direzione perpendicolare al moto perché le coordinate relative restano immutate.

In definitiva:

misurata in un sistema inerziale in moto con velocità v rispetto alla sua lunghezza, la lunghezza di un corpo è

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \tag{9}$$

dove L_0 è la lunghezza propria del corpo.

DENTRO LA FORMULA

- Il fattore adimensionale $1/\gamma$ è sempre minore di 1: la lunghezza di un corpo in movimento è dunque sempre minore della sua lunghezza propria L_0. Per questo motivo si parla di contrazione delle lunghezze dei corpi in moto.
- Il fattore $1/\gamma$ diventa significativamente diverso da 1 solo a velocità molto alte. Per tutte le velocità della nostra esperienza quotidiana $\gamma \sim 1$ e l'effetto di contrazione delle lunghezze è assolutamente trascurabile.
- Fino a una velocità v di circa $1,2 \cdot 10^8$ m/s, cioè fino al 40% della velocità della luce, si può usare un'ottima approssimazione

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

ESEMPIO

La Terra si muove attorno al Sole a una velocità di circa v = 30 km/s, per cui $v/c = (30 \cdot 10^3 \text{ m/s})/(3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 10^{-4}$ nella direzione del moto il suo diametro si accorcia di un fattore

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = 1 - 5 \cdot 10^{-9}$$

In altre parole a 30 km al secondo gli effetti relativistici danno un accorciamento di 5 parti per miliardo. Il diametro della Terra è $1{,}3 \cdot 10^7$ m, per cui l'accorciamento è

$$\Delta l \sim 5 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}3 \cdot 10^7 \text{ m} \sim 7 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 7 \text{ cm}$$

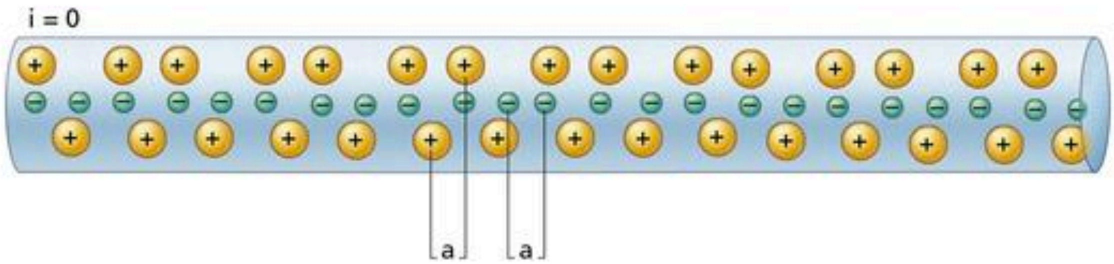
MINDBUILDING La forza magnetica come effetto della contrazione delle lunghezze

Einstein dichiarò in vecchiaia che ciò che lo condusse «in modo più o meno diretto alla teoria della relatività fu la convinzione che la forza che agisce su una carica in moto in un campo magnetico non sia altro che la forza elettrica».

Questa intuizione di Einstein viene dimostrata dalla teoria della relatività e rappresenta uno dei risultati più significativi e profondi di essa: il campo elettrico e il campo magnetico sono manifestazioni diverse con cui la stessa interazione si evidenzia in sistemi inerziali differenti.

Consideriamo l'interazione tra un filo percorso da corrente e una carica in moto rispetto a esso.

Il disegno seguente mostra la configurazione delle cariche all'interno di un filo in cui non circola corrente.

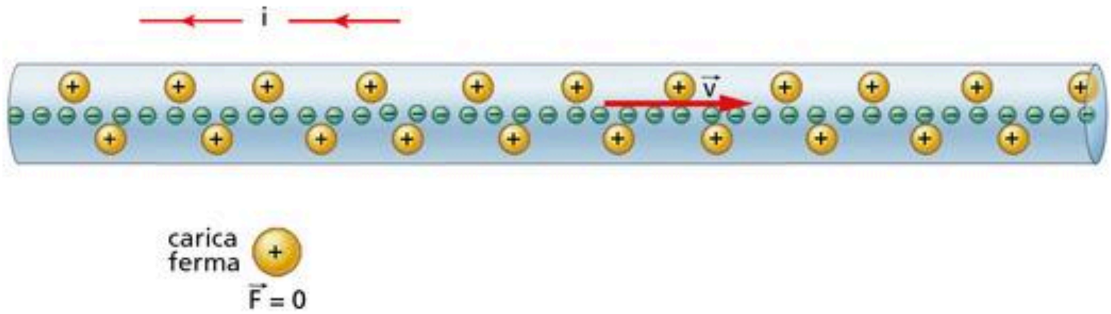


Sappiamo che un filo conduttore è elettricamente neutro. Per semplicità:

- approssimiamo il filo con due densità lineari di carica di segno opposto, una negativa λ_- (gli elettroni) e l'altra positiva λ_+ (gli ioni) che si compensano e rendono neutro il filo;

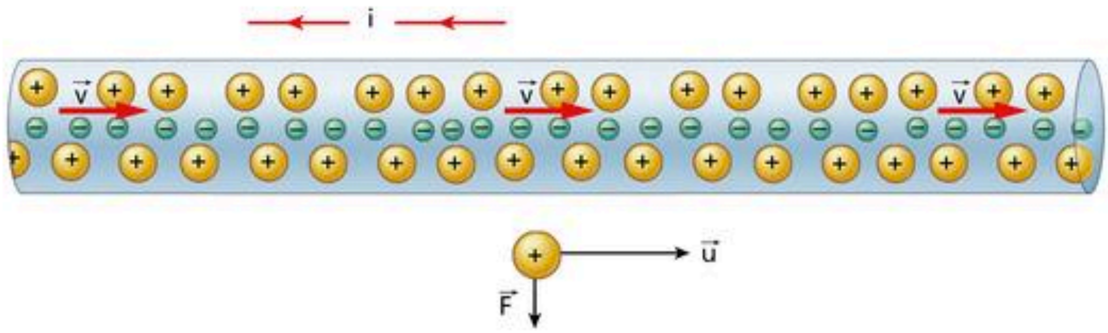
- supponiamo che gli elettroni siano una fila di cariche separate da un tratto a. Per garantire la neutralità del filo anche la distanza media tra le cariche positive deve essere a.

L'intensità di corrente i è l'effetto del moto degli elettroni di conduzione con una velocità di deriva v piccolissima, in genere dell'ordine di 10^{-5} m/s. Poiché $v/c \approx 10^{-14}$ m/s, nel seguito poniamo per semplicità $v^2/c^2 = 0$.



Il disegno precedente mostra il filo percorso da corrente. In questa situazione, una carica positiva q ferma a distanza r dal filo non sente alcuna forza, perché gli effetti elettrici delle cariche positive e negative nel filo si annullano.

La situazione cambia se la carica positiva q si muove, come mostra il disegno sotto, con velocità $\vec{u}$ in direzione opposta alla corrente, cioè nel verso degli elettroni.



Per la carica q accadono i fatti seguenti:

- le cariche positive del filo sono in moto con velocità $-\vec{u}$, mentre le cariche negative si muovono con velocità $-\vec{u} + \vec{v}$;

- si hanno due contrazioni diverse delle distanze medie tra le cariche positive e quelle negative del filo: le cariche positive sono più veloci e la loro contrazione è maggiore, per cui nel filo $\lambda_+ > |\lambda_-|$;
- la densità di carica totale del filo è positiva e il risultato è una forza F perpendicolare al filo che la respinge.

In definitiva:

- in un sistema di riferimento **solidale col filo**, la carica in moto risente della forza di Lorentz dovuta al campo magnetico creato dalla corrente che scorre nel filo;
- in un sistema di riferimento **solidale con la carica**, la forza repulsiva che agisce su di essa è di natura elettrica ed è dovuta a una distribuzione di carica positiva nel filo.

La stessa forza ha diverse interpretazioni a seconda del sistema di riferimento. Vediamo per quale ragione.

Sappiamo che il campo elettrico a distanza R da un filo con densità di carica lineare λ è

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

La forza elettrica che agisce sulla carica q è

$$F_{el} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Distinguiamo le due situazioni: carica q ferma e carica q in moto. Poiché le velocità in gioco sono molto piccole rispetto a c si adottano le approssimazioni seguenti:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \approx + \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{c^2}$$

e si trascurano le potenze di v/c e di u/c superiori al secondo grado.

Carica q ferma.

Quando nel filo non scorre corrente, le densità di carica positiva e negativa sono rispettivamente $\lambda_{0+} = e/a$ e $\lambda_{0-} = -e/a$. Quando scorre corrente, la contrazione aumenta la densità di carica negativa perché la distanza a fra gli elettroni diminuisce. Ricordando però che $v^2/c^2 \approx 0$ tale contrazione è del tutto trascurabile: le densità di carica lineare rimangono invariate.

La densità lineare totale di carica è zero $\lambda_0 = \lambda_{0+} + \lambda_{0-} = 0$: sulla carica non agisce alcuna forza elettrica.

Carica q in moto con velocità $\vec{u}$ nel verso degli elettroni.

La densità delle cariche positive aumenta per effetto della contrazione dovuta al moto di allontanamento con velocità $-\vec{u}$ dalla carica q

$$\lambda_+ = \lambda_{0+}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{(-u)^2}{c^2}\right) = \left(\frac{e}{a}\,1 + \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{c^2}\right)$$

In modo analogo, per effetto del moto relativo con velocità $\vec{v} - \vec{u}$ la densità di carica degli elettroni diviene

$$\lambda_- = -\frac{e}{a}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{(v-u)^2}{c^2}\right) \approx -\frac{e}{a}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

In definitiva la carica q vede nel filo una densità lineare

$$\lambda = \lambda_+ + \lambda_- = \frac{e}{a}\,\frac{uv}{c^2}$$

e risente di una forza dovuta al campo elettrico pari a

$$F_{el} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{a}\,\frac{uv}{c^2}\,\frac{q}{R} \tag{11}$$

Dalla relazione $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ deriva che

$$\varepsilon_0 \cdot c^2 = 1/\mu_0$$

mentre l'intensità di corrente nel filo è

$$i = ev/a$$

Sostituendo le due ultime relazioni nella (11) si ha

$$F_{el} = qu\,\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{R}$$

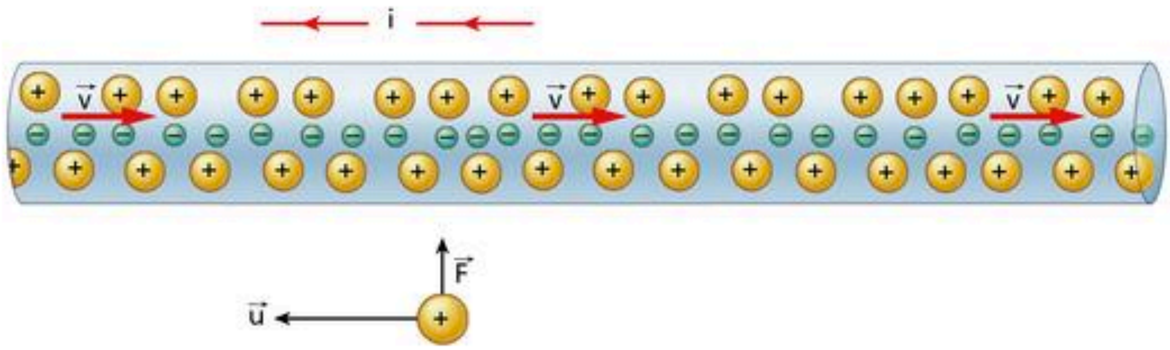
Ricordando che

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{R}$$

è il campo magnetico generato da una corrente rettilinea in un punto a distanza R, concludiamo che la forza elettrica F_{el} è proprio la forza magnetica (di Lorentz) che si esercita su una carica in moto con velocità $\vec{u}$ parallela a un filo percorso da una corrente i:

$$F_{mag} = quB$$

Se la velocità della carica q è nel verso della corrente, allora q vede muoversi gli elettroni con velocità $-\vec{u}-\vec{v}$ e le cariche positive con velocità $-\vec{u}$. Ora le cariche negative subiscono una contrazione maggiore, quindi la loro densità lineare aumenta più di quella delle cariche positive e q è attratta dal filo, come si vede nel disegno sotto. L'intensità della forza non cambia.



Confermando l'intuizione di Einstein, abbiamo dimostrato che «la forza che agisce su una carica in moto in un campo magnetico non [è] altro che la forza elettrica» dovuta alla contrazione delle lunghezze.