

# 1 I sistemi di riferimento

## I sistemi inerziali e le leggi di Newton

Nella dinamica il moto di un corpo è descritto mediante una funzione che stabilisce come la sua posizione, riferita a un sistema di coordinate, varia nel tempo. In particolare, si immagina che un *osservatore* nel suo *sistema di riferimento* sia in grado di effettuare misure di posizione, riferite per esempio a un sistema rigido di tre assi ortogonali, e misure di tempo mediante un orologio.

Le basi della dinamica furono fissate da Newton sotto forma di tre principi che racchiudono le innumerevoli evidenze sperimentali osservate nello studio dei moti. In particolare il primo principio o principio d'inerzia definisce una particolare categoria di osservatori, cioè gli osservatori che utilizzano sistemi di *riferimento inerziali*, come analizzato nel capitolo «I principi della dinamica».

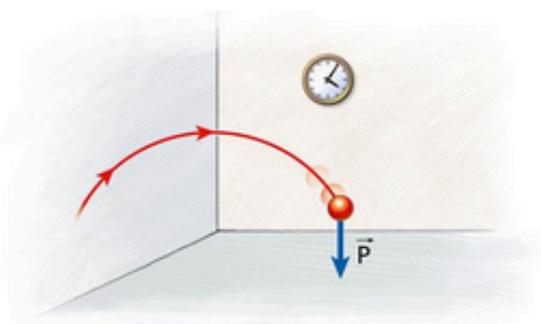
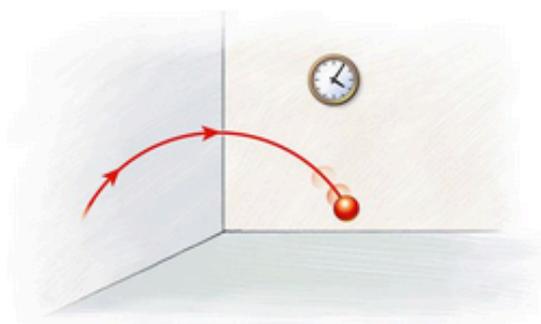
Il problema è che la definizione di sistema di riferimento inerziale può essere solo sperimentale: stabiliamo che un sistema di riferimento è inerziale solo se osserviamo che in esso vale il principio d'inerzia.

## Sistemi inerziali e proprietà dello spazio e del tempo

In un sistema di riferimento inerziale le forze hanno sempre origine dall'interazione fra i corpi.

**1** Una stanza con un orologio appeso al muro può non sembrare un sistema di riferimento inerziale: un oggetto lanciato in aria non si muove in linea retta a velocità costante, ma segue una traiettoria parabolica accelerando verso il basso.

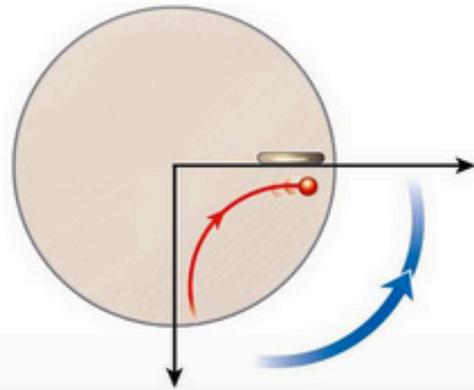
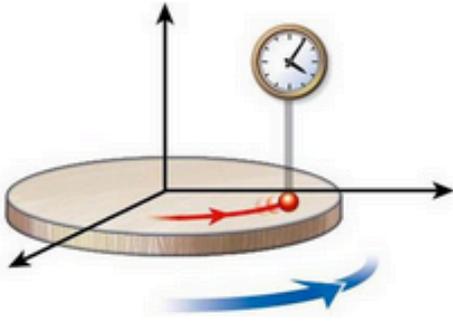
**2** Però possiamo dire che la stanza è un sistema di riferimento inerziale, ma che sull'oggetto agisce la forza peso  $P = m \cdot g$  che lo accelera verso il basso. Il corpo che provoca la forza sull'oggetto è la Terra.



Al contrario, in un sistema di riferimento non inerziale agiscono forze che sono effetto delle accelerazioni del sistema e che *non* possono essere ricondotte a interazioni fra corpi.

**1** Un sistema di riferimento appoggiato a una piattaforma rotante non è un sistema inerziale. Una pallina fatta rotolare sul pavimento non si muove in linea retta nel sistema di riferimento, ma percorre un arco di circonferenza.

**2** Non riusciamo a trovare nessuna causa fisica che produca la forza necessaria a curvare la traiettoria, per cui la piattaforma rotante non è un sistema di riferimento inerziale.



Dal punto di vista sperimentale, ne consegue che, se  $SI$  è un sistema di riferimento inerziale, allora un altro sistema di riferimento  $SR$  è inerziale se e solo se:

1. è un sistema spostato di una quantità fissa rispetto a  $SI$ , cioè le origini dei due sistemi di riferimento sono diverse;
2. è un sistema ruotato di un angolo fisso rispetto a  $SI$  e dunque gli assi di  $SR$  hanno direzioni diverse rispetto a  $SI$ ;
3. il verso di un asse in  $SR$ , per esempio  $x$ , è invertito rispetto al corrispondente asse di  $SI$  (in questo caso si dice che un sistema è destrorso e l'altro sinistrorso);
4. il tempo misurato dall'orologio di  $SR$  è misurato da un istante iniziale diverso rispetto al tempo dell'orologio di  $SI$ ;
5.  $SR$  si sta muovendo in linea retta a velocità costante rispetto a  $SI$ ;
6.  $SR$  differisce dal primo sistema per una combinazione della prima e della quinta condizione.

Il sistema  $SR$  non è inerziale se trasla con moto accelerato o ruota rispetto al sistema inerziale  $SI$ . In altre parole un'accelerazione lineare o centripeta fa perdere l'inerzialità al sistema.

Le sei condizioni appena espresse fissano le caratteristiche sperimentali dei sistemi inerziali nella dinamica newtoniana: in modo equivalente, ognuna di queste caratteristiche si può esprimere come proprietà dello spazio o del tempo.

Se consideriamo infatti porzioni dello spazio in cui non ci siano pianeti o stelle nelle vicinanze, possiamo affermare che:

- lo spazio è omogeneo, cioè non ci sono posizioni privilegiate e tutti i punti si equivalgono;
- lo spazio è isotropo, cioè non ci sono direzioni privilegiate;
- se un insieme di corpi si muove in un certo modo, il loro moto osservato allo specchio è ancora un modo possibile di muoversi;
- il tempo è universale, scorre allo stesso modo per tutti gli osservatori e gli istanti sono tutti equivalenti;
- non è possibile stabilire sperimentalmente la velocità assoluta del proprio sistema di riferimento nello spazio e tutto ciò che si può rilevare è la propria velocità relativa a un altro sistema.

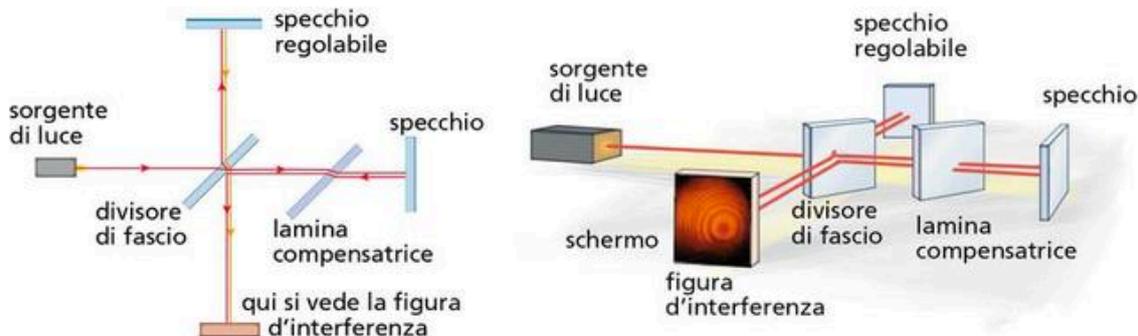
Però è possibile stabilire se il proprio sistema di riferimento sta accelerando, per esempio osservando forze fittizie, ossia forze che, come analizzato nel capitolo «I principi della dinamica», sono proporzionali alle masse dei corpi su cui agiscono. In altre parole l'accelerazione nello spazio è assoluta.

## L'etere e l'esperimento di Michelson-Morley

Nella teoria di Maxwell, le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con velocità  $1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \sim 3,00 \cdot 10^8$  m/s. Poiché nel vuoto la costante dielettrica  $\epsilon_0$  e la permeabilità magnetica  $\mu_0$  mantengono gli stessi valori in tutti i sistemi di riferimento inerziali, la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi inerziali, indipendentemente dal loro stato di moto.

In analogia con le onde meccaniche, alla fine dell'Ottocento i fisici ritenevano che le onde elettromagnetiche dovessero propagarsi all'interno di un ipotetico mezzo elastico, detto *etere*, che permeava tutto lo spazio. Fra le proprietà dell'etere, la più singolare era certamente quella di fornire un sistema di riferimento inerziale *assoluto*, simile alle stelle fisse ipotizzate da Newton. Se l'etere esiste, si può stabilire la velocità assoluta di un qualsiasi sistema di riferimento mediante misure sulla velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche, contraddicendo così la quinta proprietà dei sistemi inerziali.

Furono approntati vari esperimenti per determinare la velocità della Terra rispetto all'etere, il più accurato dei quali fu quello di Michelson-Morley, basato su un interferometro di sensibilità così elevata da poter rilevare l'effetto della velocità della Terra ( $3 \cdot 10^4$  m/s) rispetto a quello della luce ( $3 \cdot 10^8$  m/s).



Il dispositivo crea una figura di interferenza tra due fasci di luce che si ottengono dividendo uno stesso fascio di luce monocromatica con uno specchio semi-argentato (detto divisore di fascio). Mediante uno specchio mobile si rendono uguali le lunghezze dei due cammini, mentre una lamina compensatrice inserita sul percorso del raggio che attraversa lo specchio semiargentato assicura che i due fasci percorrano lo stesso cammino all'interno del vetro.

Il dispositivo è molto sensibile a qualsiasi variazione intervenga lungo il percorso della luce: per esempio, uno spostamento dello specchio mobile di un decimo di millimetro provoca uno spostamento di centinaia di frange della figura d'interferenza.

Fra il 1881 e il 1887 Albert Michelson, con l'aiuto di Edward Morley, utilizzò questo interferometro per misurare la velocità assoluta della Terra rispetto all'etere. L'idea era quella di cambiare l'orientamento dell'interferometro nello spazio, in modo da far sì che la velocità della Terra cambiasse le velocità con cui la luce si sposta all'interno del dispositivo, provocando così lo spostamento delle frange di interferenza.

Supponiamo che l'interferometro si sposti rispetto all'etere con velocità  $v$  in direzione del braccio indicato nel disegno. Indichiamo con  $d$  la distanza fra lo specchio semiargentato e ognuno degli altri due specchi e calcoliamo il tempo che la luce impiega per coprire la distanza  $2d$  in ciascuno dei due cammini facendo l'ipotesi che la velocità della luce rispetto all'etere è  $c$ .

**1 Cammino parallelo a  $\vec{v}$**

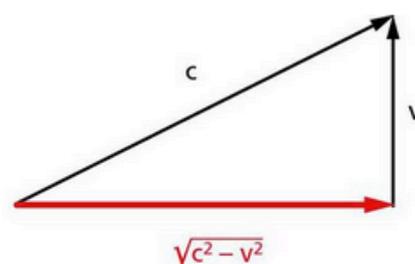
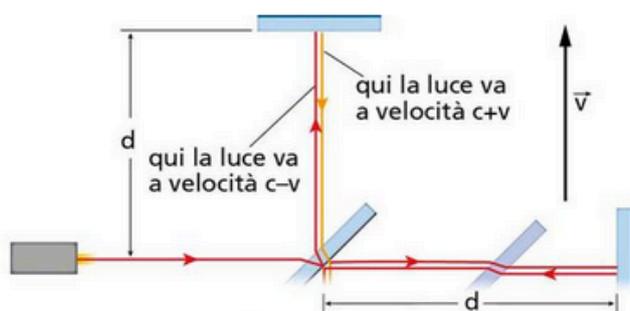
La velocità della luce nel dispositivo all'andata è  $c - v$ , al ritorno è  $c + v$ :

$$\Delta t_1 = \frac{d}{(c - v)} + \frac{d}{(c + v)} = 2 \cdot \frac{dc}{(c^2 - v^2)}$$

**2 Cammino perpendicolare a  $\vec{v}$**

La velocità della luce nel dispositivo è la stessa all'andata e al ritorno:

$$\Delta t_2 = 2 \cdot \frac{dc}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$$



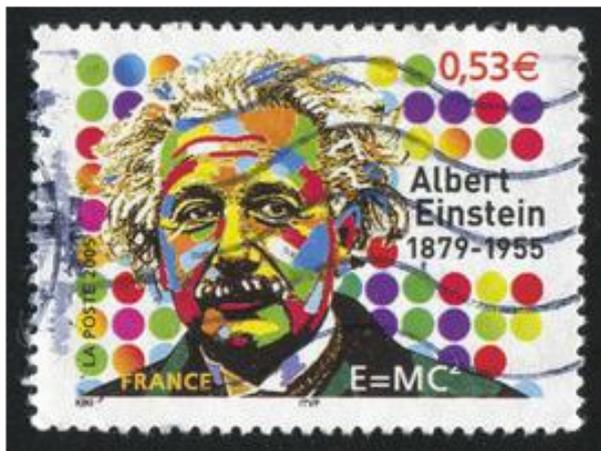
La differenza fra i tempi di percorrenza dovrebbe produrre un effetto misurabile sullo spostamento delle frange attraverso il quale misurare  $v$ .

Contrariamente alle attese, Michelson e Morley non rilevarono alcuno spostamento delle frange. L'esito di queste misure contrasta con l'ipotesi dell'esistenza di un etere in quiete in cui si propagano le onde elettromagnetiche e si accorda col principio secondo il quale è impossibile stabilire un moto assoluto nello spazio a velocità costante.

## 2 La relatività di Einstein

Nel 1905 Einstein pubblicò un articolo dal titolo *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*, destinato a influenzare profondamente la fisica successiva, in cui espose in modo compiuto la **teoria della relatività ristretta**.

Nella sua teoria, che con denominazione più appropriata si potrebbe definire una *teoria dei sistemi di riferimento inerziali*, Einstein propone il modello matematico che descrive lo spazio e il tempo in regioni in cui non sono presenti grandi concentrazioni di materia o energia.



L'analisi di Einstein non prese le mosse dal fallimento degli esperimenti volti a misurare la velocità della Terra nell'etere, quanto piuttosto da considerazioni di tipo concettuale. Einstein considerò un'onda elettromagnetica piana, formata da un campo elettrico e da un campo magnetico oscillanti che si propagano nel vuoto con velocità  $3,00 \cdot 10^8$  m/s. Se un osservatore fosse in grado di muoversi alla stessa velocità dell'onda «vedrebbe» l'onda come un insieme di campi elettrici e magnetici statici con un andamento sinusoidale nella direzione del moto. Le equazioni di Maxwell non contemplano però una situazione di questo tipo: si deve concludere che la luce non può apparire ferma a un osservatore e che quindi non è possibile per un osservatore muoversi alla stessa velocità di un'onda elettromagnetica.

Einstein intuì che, se la luce nel vuoto non può essere raggiunta, non può nemmeno essere rallentata o accelerata: un osservatore in moto rispetto a un'onda elettromagnetica misurerà sempre la stessa velocità di  $3,00 \cdot 10^8$  m/s.

Estendendo la sua analisi anche ad altri fenomeni, Einstein concluse che «i fenomeni elettrodinamici, come quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti al concetto di quiete assoluta». Questa ipotesi ripristina la validità del punto 5 del paragrafo precedente: non è possibile stabilire la velocità assoluta del proprio sistema di riferimento nemmeno effettuando misure sulla velocità della luce.

## I postulati di Einstein

Nell'articolo del 1905 Einstein pose a fondamento della sua analisi i due postulati seguenti:

- «Le leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica sono valide per tutti i sistemi di coordinate nei quali valgono i principi della dinamica.»
- «Nello spazio vuoto la luce si propaga sempre con una velocità  $v$  ben determinata, indipendente dallo stato di moto del corpo che la emette.»

In termini moderni, le basi della teoria della relatività sono i due principi seguenti:

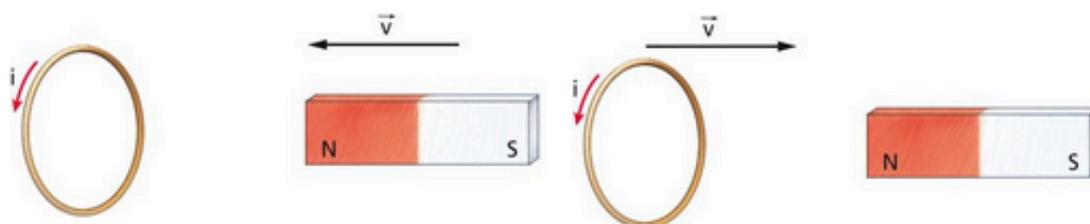
- **Principio di relatività:** le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- **Principio di costanza della velocità della luce:** la velocità della luce  $c$  è la stessa in tutti i sistemi inerziali, indipendentemente dal moto della sorgente che la emette.

Il principio di relatività galileiano, secondo il quale le leggi del moto sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali, venne esteso da Einstein a tutte le leggi della fisica. Egli osservò in particolare che l'elettromagnetismo è una teoria che di fatto soddisfa il principio di relatività, perché fornisce descrizioni equivalenti di uno stesso fenomeno osservato in sistemi di riferimento inerziali differenti.

Seguendo Einstein, consideriamo le interazioni fra una spira circolare e un magnete che si spostano con moto relativo lungo i loro assi.

**1** Se si muove il magnete, la variazione del flusso magnetico attraverso la spira genera una corrente indotta che circola in essa.

**2** Se si muove la spira, la forza di Lorentz spinge gli elettroni liberi a muoversi nella spira dando luogo a una corrente elettrica in essa.



Le leggi dell'elettromagnetismo applicate in un sistema di riferimento inerziale solidale con la spira e in un sistema solidale con il magnete prevedono la stessa intensità di corrente nella spira.

Il principio di relatività di Einstein stabilisce la completa equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali, per cui non può esistere un sistema in quiete assoluta mediante il quale stabilire la velocità *assoluta* di ogni altro sistema inerziale. Ciò comporta la necessità di introdurre il principio di costanza della velocità della luce in pieno accordo con i risultati negativi dell'esperimento di Michelson e Morley: la velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento inerziale in cui viene misurata, né dallo stato di moto della sorgente.

L'introduzione di questo principio obbliga a modificare la proprietà 4 dei sistemi inerziali: il tempo non è più universale, ma scorre in modo diverso nei vari sistemi di riferimento inerziali.



Da ciò derivano alcune delle conseguenze più sorprendenti della relatività, come la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze. Ma in fisica l'unica giustificazione per introdurre un nuovo postulato è valutare il successo della teoria in cui viene inserito: proprio l'enorme successo interpretativo e sperimentale della teoria della relatività indica che questo principio è conforme alla realtà e consente di scoprire fenomeni prima ignorati a causa del fatto che le velocità comuni sono molto piccole rispetto a quella della luce.

### 3 Conseguenze dei postulati di Einstein: il ritardo degli orologi in movimento

Una conseguenza dei due principi di Einstein è la relatività degli intervalli di tempo. Ciò significa che se due osservatori sono in moto relativo l'uno rispetto all'altro, ciascuno vede l'orologio dell'altro segnare intervalli di tempo più lunghi di quelli segnati dal proprio orologio. Questo è un fatto sperimentalmente comprovato: non esiste un tempo assoluto unico per tutti gli osservatori.

## La dilatazione dei tempi

Un orologio è un sistema che cambia il suo stato interno e il tempo è la sequenza di questi cambiamenti. I comuni orologi da polso contengono un cristallo di quarzo che produce oscillazioni di potenziale. Un sistema elettronico conta queste oscillazioni e le converte nelle unità che utilizziamo per misurare il tempo. Il risultato di questo conteggio è visualizzato dai numeri sul display dell'orologio.

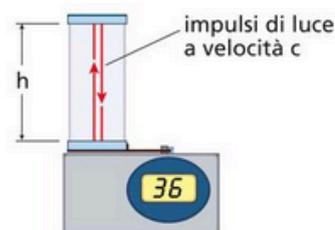
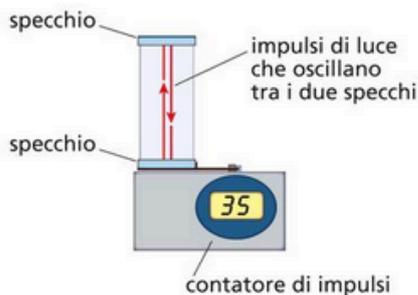
Per analizzare il processo di misura, utilizziamo un orologio concettualmente molto semplice: l'orologio a specchi.

**1** Un orologio a specchi è formato da due piccoli specchi paralleli. Lo specchio inferiore è semiriflettente ed è appoggiato su un sistema elettronico che conta quanti impulsi luminosi lo colpiscono. Ogni volta che viene attivato, il sistema elettronico fa partire un nuovo impulso di luce verso lo specchio superiore. Gli impulsi luminosi che si muovono tra i due specchi scandiscono gli intervalli di tempo.

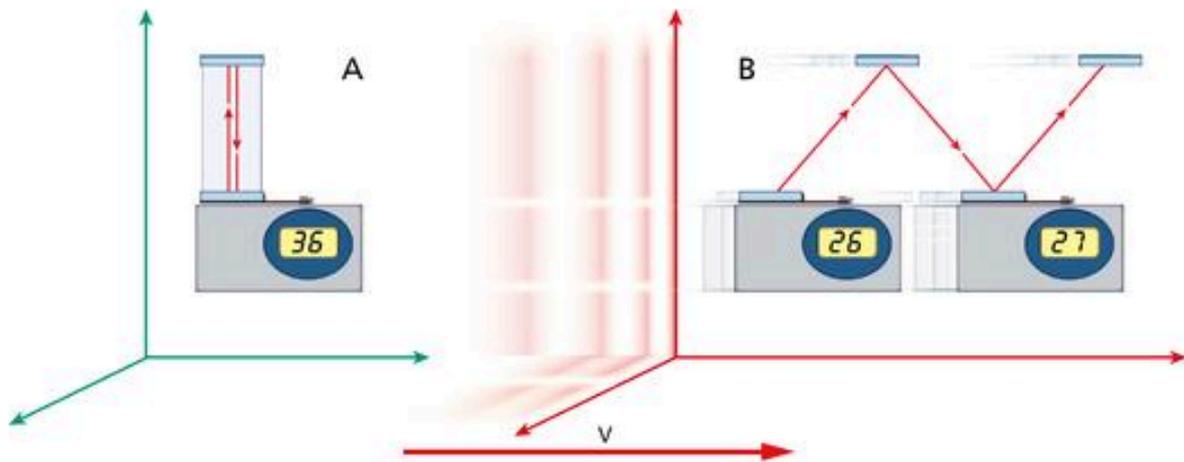
**2** Chiamiamo  $h$  la distanza tra i due specchi e  $\Delta t$  l'intervallo di tempo scandito da un impulso. Gli impulsi si muovono a velocità  $c$ , per cui

$$\Delta t = 2 \cdot \frac{h}{c}$$

Per esempio se la distanza tra i due specchi è di  $h = 15$  cm, il display del contatore è tarato in nanosecondi.



Consideriamo due osservatori  $A$  e  $B$ , ciascuno in un sistema di riferimento dotato di un orologio a specchi. I due sistemi di riferimento  $A$  e  $B$  sono in moto relativo l'uno rispetto all'altro:  $A$  vede  $B$  allontanarsi a velocità costante  $v$ ,  $B$  vede  $A$  allontanarsi a velocità costante  $-v$ . Ciascun osservatore ha il proprio orologio fermo nel suo sistema di riferimento e vede l'altro orologio muoversi. Sia  $A$  sia  $B$  osservano che l'orologio in moto rallenta come mostrato nel disegno sotto, e cioè scandisce intervalli di tempo più lunghi rispetto a quelli del proprio orologio.



Per comprendere l'origine di questo fenomeno, consideriamo un moto relativo con velocità  $v$ , in una direzione parallela agli specchi degli orologi.

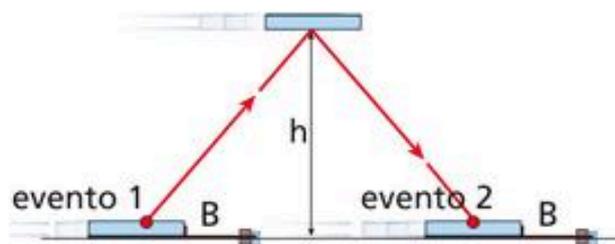
Valutiamo la durata dell'intervallo di tempo fra i due eventi seguenti:

- un impulso di luce parte dallo specchio inferiore dell'orologio di  $B$ ;
- l'impulso di luce di luce arriva nello specchio inferiore dell'orologio di  $B$ .

Misurato nel sistema  $B$ , l'intervallo di tempo è

$$\Delta t_B = 2 \cdot h/c$$

perché la luce ha percorso una distanza totale  $2h$  con velocità  $c$ .



Un osservatore in  $A$  rileva che nell'intervallo  $\Delta t_A$  fra i due eventi l'orologio si sposta di un tratto, per cui la luce percorre una traiettoria lunga

$$z = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t_A\right)^2 + h^2}$$

come si verifica applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di cateti  $h$  e  $\frac{1}{2} v \Delta t_A$ .

Anche per  $A$  la luce si muove con velocità  $c$ , per cui l'intervallo di tempo misurato da  $A$  è

$$\Delta t_A = \frac{z}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{\left(\frac{1}{2} v \Delta t_A\right)^2 + h^2}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri

$$(\Delta t_A)^2 = \frac{v^2}{c^2} (\Delta t_A)^2 + \frac{4h^2}{c^2}$$

ossia

$$(\Delta t_A)^2 = \frac{4h^2}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Notiamo che  $\Delta t_B = 2 \cdot h/c$  è l'intervallo di tempo tra 1 e 2 misurato da  $B$ . Sostituendo nella relazione precedente ed estraendo la radice quadrata si ha in definitiva

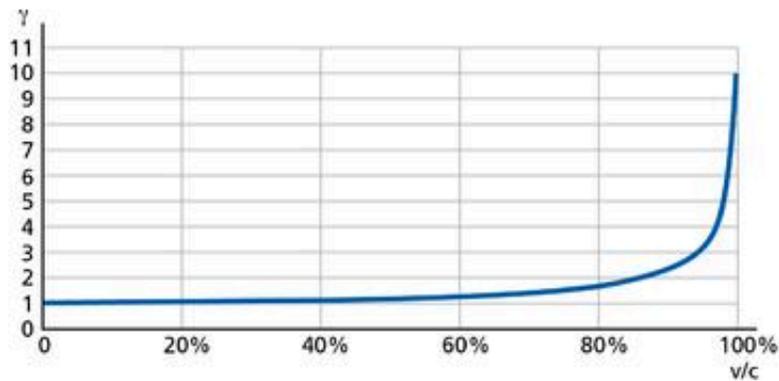
$$\Delta t_A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_B \quad (1)$$

dove

- $\Delta t_A$  è l'intervallo di tempo, misurato nel sistema  $A$ , fra due eventi che accadono nel sistema  $B$  in moto con velocità  $v$  rispetto ad  $A$ ;
- $\Delta t_B$  è l'intervallo di tempo, misurato nel sistema  $B$ , fra gli stessi due eventi che accadono nel sistema  $B$ .

#### DENTRO LA LEGGE

- Il fattore moltiplicativo  $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$  è adimensionale ed è sempre maggiore di 1, anche se per tutte le velocità con cui comunemente abbiamo a che fare è praticamente uguale a 1.



- Fino a una velocità  $v$  di circa  $1,2 \cdot 10^8$  m/s, cioè fino al 40% della velocità della luce, l'approssimazione

$$\gamma \sim 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (2)$$

è ottima e si può usare per valutare gli effetti di ritardo degli orologi in moto.

- Poiché  $\gamma > 1$ , la minima durata dell'intervallo fra due eventi che accadono nello stesso punto è quella misurata da un orologio fisso in quel punto ed è detta **intervallo di tempo proprio**  $\Delta t_0$  o semplicemente **tempo proprio**.

Per il principio di relatività, nei sistemi inerziali  $A$  e  $B$  valgono le stesse leggi: il ritardo dell'orologio di  $B$  visto da  $A$  è identico al ritardo dell'orologio di  $A$  visto da  $B$ .

Consideriamo infatti l'osservatore  $B$  che vede allontanarsi  $A$  con velocità  $-v$  e valutiamo la durata dell'intervallo di tempo fra i due eventi seguenti:

- un impulso di luce parte dallo specchio inferiore dell'orologio di  $A$ ;
- l'impulso di luce arriva nello specchio inferiore dell'orologio di  $A$ .

L'osservatore  $A$  rileva l'intervallo di tempo proprio  $\Delta t_A = 2 \cdot h/c$ , mentre l'osservatore in  $B$  misura un intervallo di tempo  $\Delta t_B$  dato dalla (1) con velocità relativa  $-v$ :

$$\Delta t_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}}} \Delta t_A \rightarrow \Delta t_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t_A$$

L'osservatore *A* vede ritardare l'orologio di un osservatore *B* che si muove con velocità *v* rispetto a lui: *B* attribuisce all'orologio di *A* lo stesso ritardo.

**QUANTO?** Più sei veloce, più ritardi

Un orologio posto su un aereo che viaggia alla velocità del suono ( $v = 340 \text{ m/s}$ ) ritarda rispetto a un orologio posto a terra. Il fattore  $\gamma$  è

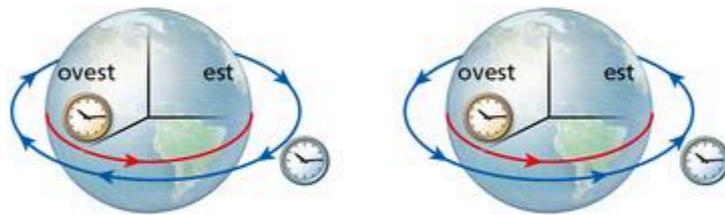
$$\gamma \sim 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = 1 + 0,5 \cdot \left( \frac{340 \text{ m/s}}{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \right)^2 = 1 + 6 \cdot 10^{-13}$$

Ciò significa che ogni volta che l'orologio sull'aereo scandisce un secondo, a terra passano  $1 + 6 \cdot 10^{-13}$  secondi. Ciò equivale a un secondo di differenza ogni quarantottomila anni: non è molto!

## Una nuova concezione di tempo

Nella relatività, la domanda «quanto tempo è passato fra due eventi?» non ha più senso, perché ora occorre specificare *per quale osservatore*. Il modello di Einstein assegna un tempo a ciascun osservatore inerziale e la relazione tra il tempo di un osservatore e quello di un altro è data dalla (1).

Questa «strana» conseguenza dei principi della relatività fu verificata sperimentalmente per la prima volta nel 1971 da Joseph Hafele e Richard Keating in un esperimento volto a misurare il ritardo degli orologi in moto relativo. I due ricercatori confrontarono con un orologio a terra il tempo misurato da orologi atomici montati su aerei di linea che effettuavano due volte il giro della Terra, una volta verso ovest e l'altra verso est.



Per spiegare l'esperimento consideriamo per semplicità un volo attorno all'equatore. Il sistema di riferimento inerziale è al centro della Terra. La Terra ha un raggio di  $6,4 \cdot 10^6$  m ed effettua una rotazione in  $24 \text{ h} = 8,64 \cdot 10^4$  s. Un orologio al suolo si muove verso est con la velocità di  $v = (2 \cdot \pi \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}) / (8,64 \cdot 10^4 \text{ s}) \sim 5 \cdot 10^2$  m/s. Un aereo in volo a  $3 \cdot 10^2$  m/s rispetto al suolo ha dunque una velocità di  $8 \cdot 10^2$  m/s rispetto al centro della Terra se vola verso ovest e  $2 \cdot 10^2$  m/s se vola verso est.

Gli intervalli di tempo misurati da orologi in moto con velocità relativa  $v$  sono più piccoli di un fattore  $1/\gamma \sim 1 - 1/2 \cdot \frac{v^2}{c^2}$ . Perciò l'orologio su un aereo che vola verso est ritarderà meno dell'orologio posto a terra, il quale ritarderà meno di quello posto su un aereo che vola verso ovest.

Il confronto avviene tra l'orologio al suolo e quelli in volo: l'orologio che vola verso est è in anticipo su quello al suolo e quello che vola verso ovest è in ritardo. L'ordine di grandezza della variazione è irrisorio:  $1/2 \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot 10^{-12}$ , cioè qualche nanosecondo per ogni ora di volo. Gli orologi atomici sono però in grado di misurare il tempo con tale precisione: la misura risultò in accordo con le previsioni della teoria di Einstein entro le incertezze sperimentali.