FORMULA DI TAYLOR, APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONE

Il polinomio di Taylor

$$P(x) = 1+3x+4x^3 \qquad x_0 = 1$$

$$\to P(x) = A\underbrace{(x-1)^0}_{\to 1} + B(x-1)^1 + C(x-1)^2 + D(x-1)^3$$
$$= A + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3$$

$$P(x_0) = P(1) = A \qquad A = P(x_0)$$

$$P'(x) = B + 2C(x-1) + 3D(x-1)^2$$
$$P'(x_0) = P'(1) = B \qquad B = P'(x_0)$$
$$P''(x) = 2C + 6D(x-1)$$
$$P''(x_0) = P''(1) = 2C \qquad C = \frac{1}{2}P''(x_0)$$
$$P'''(x) = 6D$$
$$P'''(x_0) = 6D \qquad D = \frac{1}{6}P'''(x_0)$$

$$\boxed{P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}P''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}P'''(x_0)(x-x_0)^3}$$

$$P(1) = 8$$
$$P'(1) = 3+12(1)^2 = 15$$
$$P''(1) = 24(1) = 24$$
$$P'''(1) = 24$$

$$P(x) = 8 + 15(x-1) + \frac{24}{2}(x-1)^2 + \frac{24}{6}(x-1)^3$$

FORMULA DI TAYLOR

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}P''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}P'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Teorema

Se $\varphi(x)$ è una funzione derivabile $(n+1)$ volte in I aperto e $x_0 \in I$ tale che

$$\varphi(x_0) = 0,\ \varphi'(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n)}(x_0) = 0$$

$\forall x \in I$ si ha che

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\bar{x})(x-\bar{x})^{n+1}$$

dove $\bar{x} \in [x; x_0]$

TEOREMA DI TAYLOR

Se $y=f(x)$ è derivabile $(n+1)$ volte in I, $\forall\, x, x_0 \in I$ si ha

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{n+1}}$$

con $\bar{x} \in (x; x_0)$

dove $\quad \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{n+1}=R_n$

R_n = resto n-esimo del polinomio di Taylor

FORMULA DI MAC-LAURIN

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2+\frac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3+\dots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x-0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\bar{x})(x-0)^{n+1}$$

ESEMPIO

$f(x)=e^x \qquad x=x_0$

$$f(x)=e^{x_0}+e^{x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}e^{x_0}(x-x_0)^2+\dots+\frac{1}{n!}e^{x_0}(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}e^{\bar{x}}(x-x_0)^{n+1}$$

dove $R_n=\frac{1}{(n+1)!}e^{\bar{x}}(x-x_0)^{n+1}$

$n=4 \qquad x=1 \qquad \boxed{e^x \cong 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4}$

$$e \cong 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=\frac{65}{24}$$

$$R_4=\frac{1}{5!}e^{\bar{x}}\cdot 1^5=\frac{e^{\bar{x}}}{120} \qquad \bar{x}\in[0;1]$$

$$1 \le e^{\bar{x}} \le e < 3$$

$$\frac{1}{120} \le \frac{e^{\bar{x}}}{120} \le \frac{3}{120} \qquad \frac{1}{120} \le R_4 \le \frac{3}{120}$$

$$R_7=\frac{e^{\bar{x}}}{8!} \qquad \frac{1}{40320} \le \frac{e^{\bar{x}}}{40320} \le \frac{3}{40320}$$

MASSIMI, MINIMI, FLESSI A TANGENTE ORIZZONTALE (con Taylor)

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile infinite volte in I (aperto)
Sia $x_0 \in I$ e per $n \geq 1$ si ha

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

1) se <u>$n+1$ è pari</u> allora x_0 è

- <u>PUNTO DI MASSIMO RELATIVO</u> se <u>$f^{(n+1)}(x_0) < 0$</u>
- <u>PUNTO DI MINIMO RELATIVO</u> se <u>$f^{(n+1)}(x_0) > 0$</u>

2) se $n+1$ è dispari allora x_0 è PUNTO DI FLESSO A TG ORIZZONTALE

$f(x)$	POLINOMI DI TAYLOR CON $x_0 = 0$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$
$\sin x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n!} x^{2n}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n$