USO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Teorema Sia $y=f(x)$ una funzione derivabile almeno due volte in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$ allora se la derivata seconda è continua in (a,b) e

$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ oppure

$[f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0]$

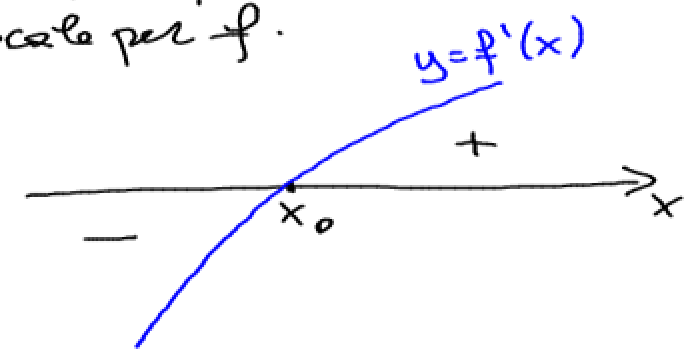
allora il punto $(x_0; f(x_0))$ è un punto di MINIMO [MASSIMO] locale.

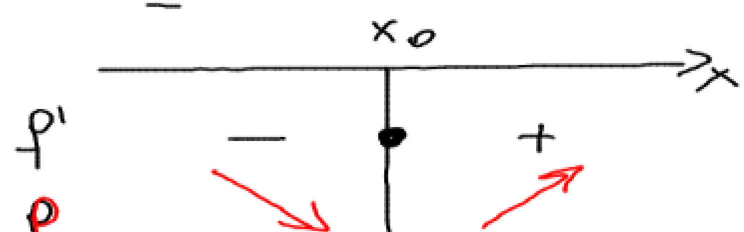
Dim

Supponiamo $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$

Siccome $f''(x)$ è continua allora $\lim_{x \to x_0} f''(x) = f''(x_0)$.

Per il Teorema della permanenza del segno $\exists\, I_{x_0}$ in cui $f''(x)>0 \Rightarrow$ la funzione $f'(x)$ è crescente e siccome, per ipotesi $f'(x_0)=0 \Rightarrow f'$ sarà negativa prima di x_0 e positiva dopo x_0. Allora x_0 sarà un punto di MINIMO locale per f.





ESEMPIO

$$f(x) = x^3 - 12x$$

- $C.E._f = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$

- segno

$x(x^2-12) > 0$ → $x > 0$; $x < -2\sqrt{3} \cup x > 2\sqrt{3}$

	$-2\sqrt{3}$		0		$2\sqrt{3}$	
x	$-$		$-$	$+$		$+$
x^2-12	$+$		$-$	$-$		$+$
$f(x)$	$-$		$+$	$-$		$+$

- zeri e int. con assi

$x = 0 \quad y = 0 \quad O(0;0)$

$x = -2\sqrt{3} \quad y = 0 \quad A(-2\sqrt{3};0)$

$x = 2\sqrt{3} \quad y = 0 \quad B(2\sqrt{3};0)$

		$-2\sqrt{3}$		0		$2\sqrt{3}$	
$f(x)$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$

- limiti e asintoti

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- simmetrie

$f(x) = x^3 - 12x \qquad f(-x) = (-x)^3 - 12(-x) = -x^3 + 12x \quad -f(-x) = x^3 - 12x$

$f(x) = -f(-x)$ FUNZIONE DISPARI

- studio derivata prima

$f(x) = x^3 - 12x \qquad f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) \geq 0 \qquad 3(x^2-4) \geq 0$

		-2		2	
$f'(x)$	$+$	$\bullet$ M	$-$	$\bullet$ N	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

N $(2;-16)$ minimo

M $(-2;16)$ massimo

- studio derivata seconda

$f''(x) = 6x \qquad f''(x) \geq 0 \qquad 6x \geq 0$

$O(0;0)$

		0	
$f''(x)$	$-$	$\bullet$ $F \equiv O$	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

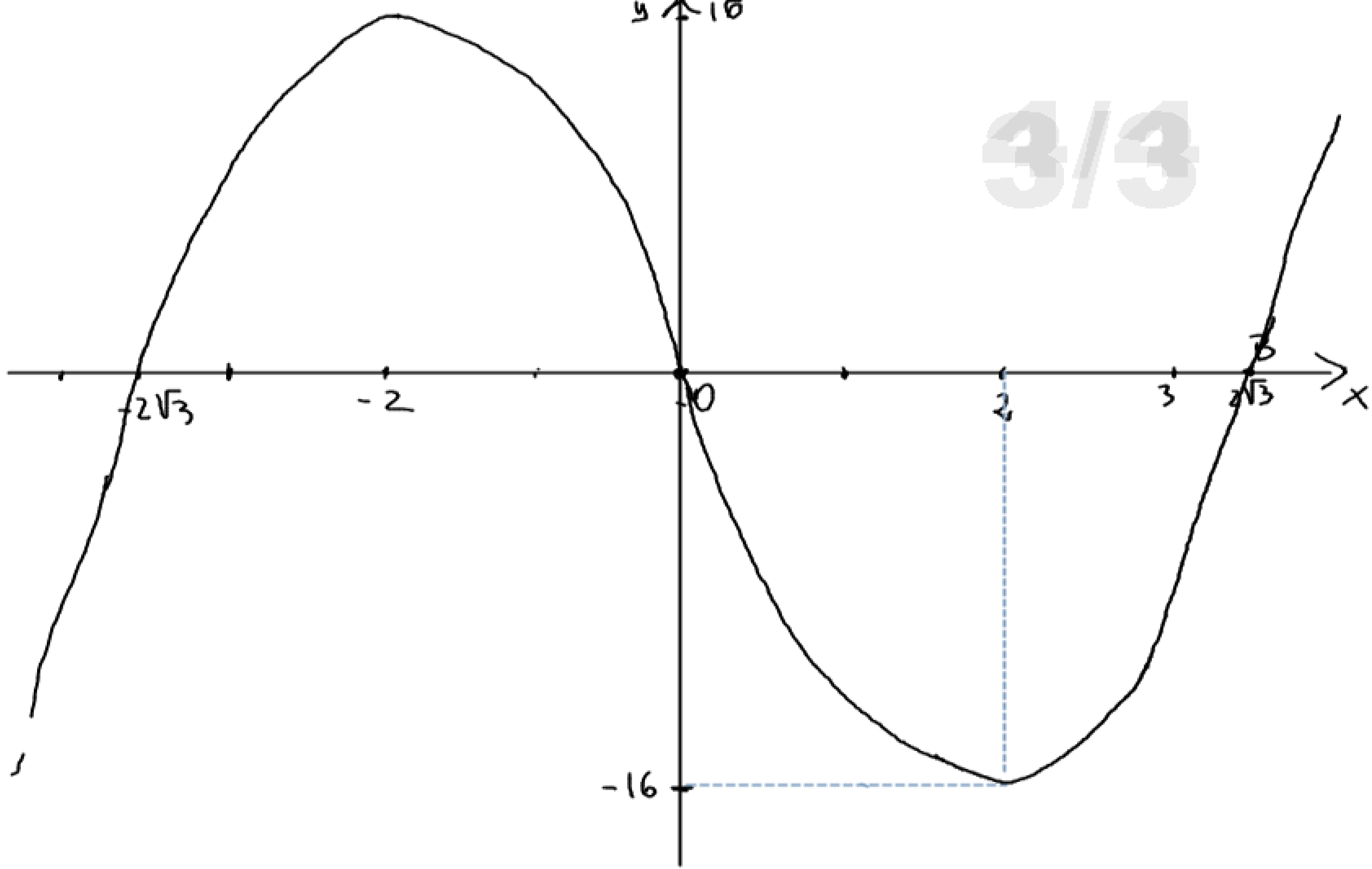
	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	$\bullet$ A	$+$		$+$	$\bullet$ O	$-$		$-$	$\bullet$ B	$+$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	$\bullet$ M	$-$		$-$	$\bullet$ N	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$	$\bullet$ $O \equiv F$	$+$		$+$		$+$	

A, O, B zeri di $f(x)$

M massimo

N minimo

O flesso a Tg orizzontale


y
16
$-2\sqrt{3}$
-2
0
2
3
$2\sqrt{3}$
x
-16