TEOREMA DI ROLLE

1ª ipotesi — 2ª ipotesi

Data la funzione $y=f(x)$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) se $f(a)=f(b)$ allora $\exists\ c\in(a,b)$ tale che $f'(c)=0$

3ª ipotesi — Tesi

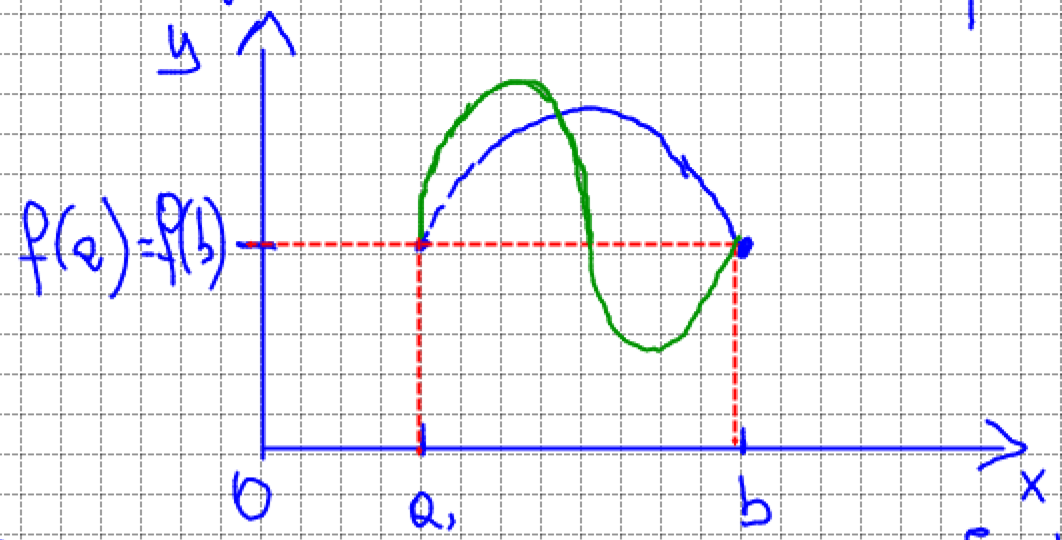
Dim

Ipotesi:

1) $y=f(x)$ continua in $[a,b]$
2) $y=f(x)$ derivabile in (a,b)
3) $f(a)=f(b)$

Tesi:

$\exists$ almeno $c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$



Siccome $y=f(x)$ è continua in $[a,b]$ allora per il teorema di Weierstrass essa ammette massimo M e minimo m in $[a,b]$: cioè $\exists\ e, d\in[a,b]$ con

$m=f(e)\le f(x)\le f(d)=M \quad \forall x$

- se $m=M$ allora $m=f(e)=f(x)=f(d)=M\ \forall x\in[a,b]$ quindi $y=f(x)$ è la funzione costante.

- se $m\ne M$ $m<M$ allora $y=f(x)$ non è costante e siccome per ipotesi $f(a)=f(b)$, almeno uno fra i valori e e d sarà interno all'intervallo (a,b); supponiamo $e\in(a,b)$ allora

$$f(e+h)\ge f(e) \implies f(e+h)-f(e)\ge 0$$

Quindi

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}\ge 0 \quad \text{per } h>0\\ \frac{f(e+h)-f(e)}{h}\le 0 \quad \text{per } h<0\end{aligned}\right\} \implies$$

$\implies$ siccome $y=f(x)$ è continua e derivabile in (a,b) allora

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}=f'(e)=0$$

ponendo $e=c$ ho dimostrato il Teorema.

ESEMPIO

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \qquad I = [0, \pi]$$

Verificare se $y = f(x)$ verifica il Teorema di Rolle e in caso affermativo trovare i punti $c \in I$

Verifico le ipotesi del Teorema di Rolle:

1) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x$ è continua in $I = [0, \pi]$

2) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x$ $\quad f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$, $f(x)$ è derivabile in $(0, \pi)$

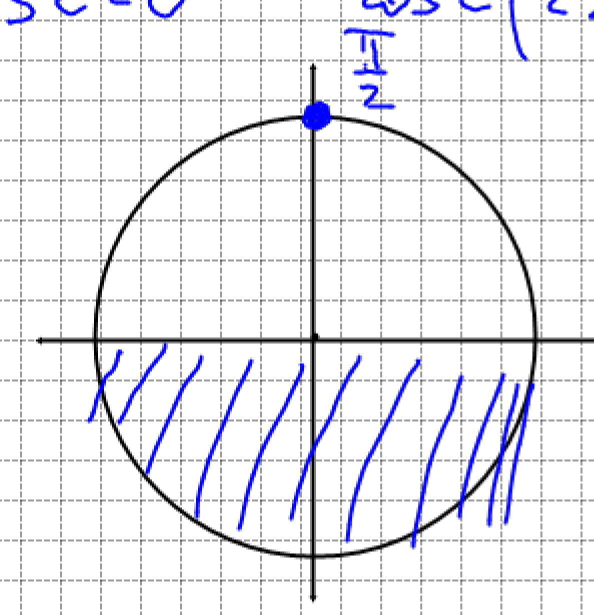
3) $f(0) = \operatorname{sen}^2 0 - \operatorname{sen} 0 = 0$
$f(\pi) = \operatorname{sen}^2 \pi - \operatorname{sen} \pi = 0$ $\qquad f(0) = f(\pi)$

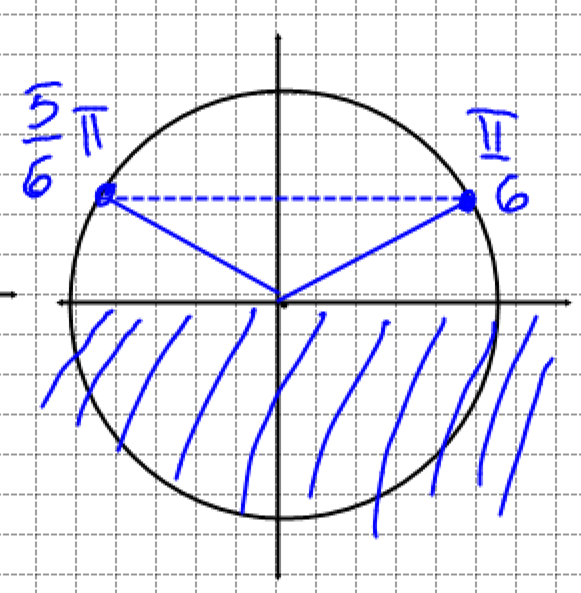
Allora $\exists$ almeno $c \in (0, \pi) \;/\; f'(c) = 0$

$2 \operatorname{sen} c \cos c - \cos c = 0 \qquad \cos c \,(2 \operatorname{sen} c - 1) = 0$

$\cos c = 0$

$\operatorname{sen} c = \dfrac{1}{2}$





$c_1 = \dfrac{\pi}{6}$

$c_2 = \dfrac{\pi}{2}$

$c_3 = \dfrac{5}{6}\pi$