TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA

Teorema

Data $y = f(x)$ definita in I ed ivi invertibile e la sua funzione inversa è $x = f^{-1}(y)$. Se $y = f(x)$ è derivabile in I e $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, allora anche $x = f^{-1}(y)$ è derivabile e

$$D\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{con } x = f^{-1}(y)$$

Dim

Consideriamo un incremento di x e lo chiamiamo Δx.
La funzione $y = f(x)$ subirà un incremento Δy tale che
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
Quindi $f(x + \Delta x) = \Delta y + f(x) = \Delta y + y$
se $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ perché $y = f(x)$ è continua

Applichiamo la definizione di derivata ricordando che
$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$.

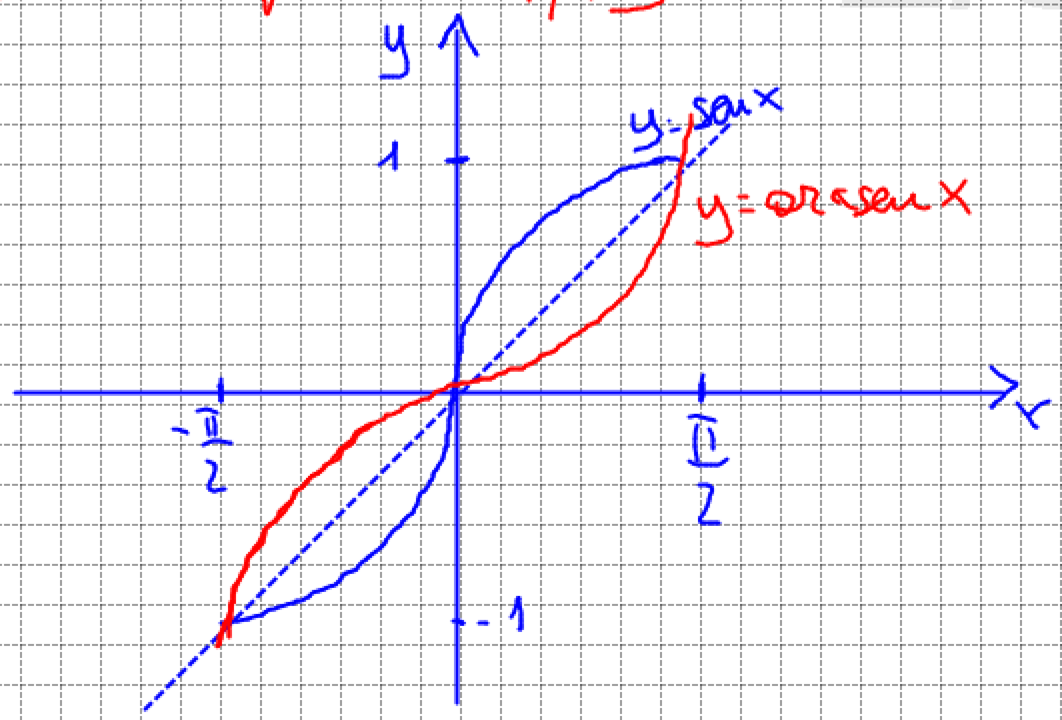
$$D\left[f^{-1}(y)\right] = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{-1}(f(x + \Delta x)) - x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{f(x + \Delta x) - f(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

DERIVATE DELLE FUNZIONI INVERSE DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

1) $y = \operatorname{arcsen} x \quad \forall x \in [-1; 1]$



la funzione inversa di $y = \operatorname{arcsen} x$ è $x = \operatorname{sen} y$ che è derivabile in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ con derivata non nulla.

$$D(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{D(\operatorname{sen} y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{D(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

2) $y = \arccos x \quad \forall x \in [-1; 1]$

la funzione inversa di $y = \arccos x$ è $x = \cos y$ derivabile $\forall y \in (0; \pi)$ con derivata non nulla.

$$D(\arccos x) = \frac{1}{D(\cos y)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3) $y = \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in [-1;1]$

la funzione inversa di $y = \operatorname{arctg} x$ è $x = \operatorname{tg} y$, derivabile $\forall\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ con derivata non nulla.

$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{D(\operatorname{tg} y)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\boxed{D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

4) $y = \operatorname{arcctg} x \quad \forall x \in [0;\pi]$

la funzione inversa di $y = \operatorname{arcctg} x$ è $x = \operatorname{ctg} y$ derivabile $\forall\ y \in (0;\pi)$ con derivata non nulla.

$$D(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{D(\operatorname{ctg} y)} = \frac{1}{\frac{-\operatorname{sen}^2 y - \cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{-(\operatorname{ctg}^2 y + 1)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{D(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}}$$