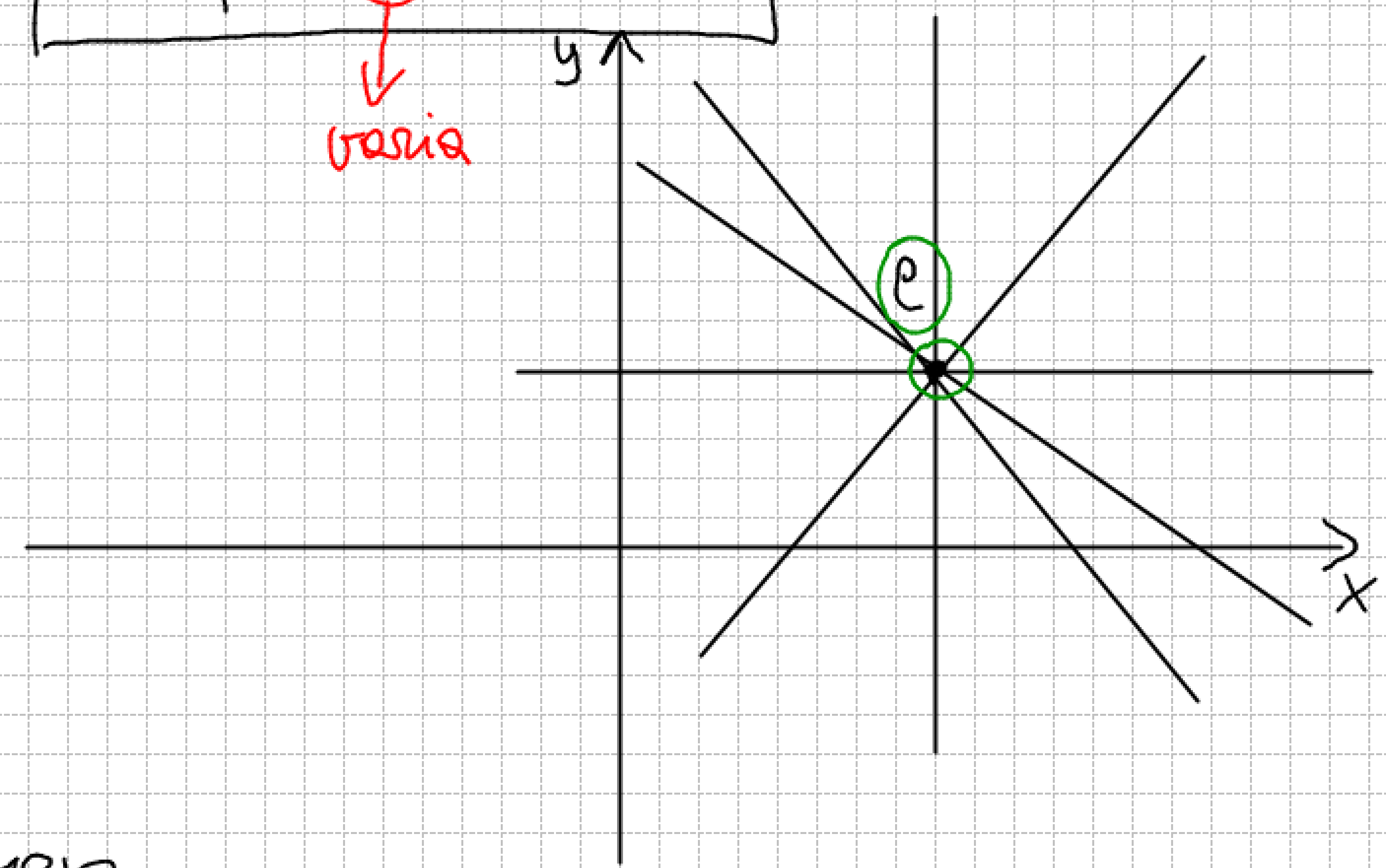
FASCIO DI RETTE

FASCIO PROPRIO

Sia $C(\alpha;\beta)$ il centro del fascio la cui equazione è:

$$\boxed{y-\beta = m(x-\alpha)}$$

varia



ESEMPIO

- Scrivere l'equazione del fascio proprio di rette passanti per $C(1;2)$:

  $\mathcal{F}_p: \quad y-2=m(x-1)$

- Trovare l'equazione della retta r del $\mathcal{F}_p$ parallela alla retta $2x-3y+8=0$

  $m=\frac{2}{3} \qquad r: y-2=\frac{2}{3}(x-1) \qquad y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

- Trovare la retta s del fascio $\mathcal{F}_p$ passante per $O(0;0)$

$\mathcal{F}_p: \quad y-2=m(x-1)$ impongo passaggio per $O(0;0)$:

$$0-2=m(0-1) \qquad -m=-2 \qquad m=2$$

sostituisco il valore di m trovato nell'equazione di $\mathcal{F}_p$ ed ho:

$$y-2=2(x-1)$$

$$y-2=2x-2 \qquad \boxed{y=2x}$$

ESEMPIO

Scrivere l'eq. del $\mathcal{F}_p$ di rette date due rette:

$r: y = 2x + 3 \qquad y - 2x - 3 = 0$

$s: y - 5x + 8 = 0$

$$\mathcal{F}_p: \boxed{r + Ks = 0 \;\cup\; s = 0}$$

$$\boxed{y - 2x - 3 + K(y - 5x + 8) = 0 \cup y - 5x + 8 = 0}$$

$$\boxed{\lambda(y - 2x - 3) + \mu(y - 5x + 8) = 0}$$

EQ FASCIO PROPRIO

$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ rette base

$s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\mathcal{F}_p: \quad \lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

suppongo $\lambda \neq 0$ e divido $\mathcal{F}_p$ per λ:

$$a_1x + b_1y + c_1 + \frac{\mu}{\lambda}(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \cup a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

ponendo $\frac{\mu}{\lambda} = K$ si ha

$$a_1x + b_1y + c_1 + K(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \;\cup\; a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\mathcal{F}_p: \lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2) = 0$$

$$m_{\mathcal{F}_p} = -\frac{(\lambda a_1 + \mu a_2)}{\lambda b_1 + \mu b_2}$$

$$q_{\mathcal{F}_p} = \frac{-(\lambda c_1 + \mu c_2)}{\lambda b_1 + \mu b_2}$$

[compaiono i parametri λ e μ quindi il fascio è PROPRIO]

$\lambda b_1 + \mu b_2 \neq 0$

ES. PAG 231 N 522

Scrivere l'equazione del fascio generato dalle rette di equazione $r: 3x+y-1=0$; $s: x+2y+3=0$
Stabilisci che fascio è e individua l'equazione della retta del fascio passante per $P(4;1)$.

$$\begin{array}{l} r \\ s \end{array}\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} r \\ 3s \end{array}\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 3x+6y+9=0 \end{cases}$$

$$// \quad -5y-10=0$$

$$\begin{array}{l} s \\ r-3s \end{array}\begin{cases} x+2y+3=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \quad C(1;-2)$$

La combinazione lineare di queste due rette da origine ad un fascio proprio di centro $C(1;-2)$

$$\mathcal{F}_P: \quad \lambda r + \mu s = 0$$

$$\boxed{\lambda(3x+y-1)+\mu(x+2y+3)=0}$$

$$3\lambda x + \mu x + \lambda y + 2\mu y - \lambda + 3\mu = 0$$

$$\underbrace{(3\lambda+\mu)}_{a}x + \underbrace{(\lambda+2\mu)}_{b}y \underbrace{+3\mu-\lambda}_{c} = 0$$

$$m_{\mathcal{F}_P} = -\frac{a}{b} \quad \text{con } b \neq 0$$

$$m_{\mathcal{F}_P} = -\frac{3\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \quad \text{con } \lambda+2\mu \neq 0$$

$C(1;-2)$; eq. fascio proprio $\Rightarrow$

$y+2=m(x-1)$. Impongo il passaggio del $\mathcal{F}_P$

per $P(4;1) \rightarrow 1+2=m(4-1) \quad 3=3m$

$$m=1 \qquad y+2=1(x-1) \qquad y=x-3$$

FASCIO IMPROPRIO

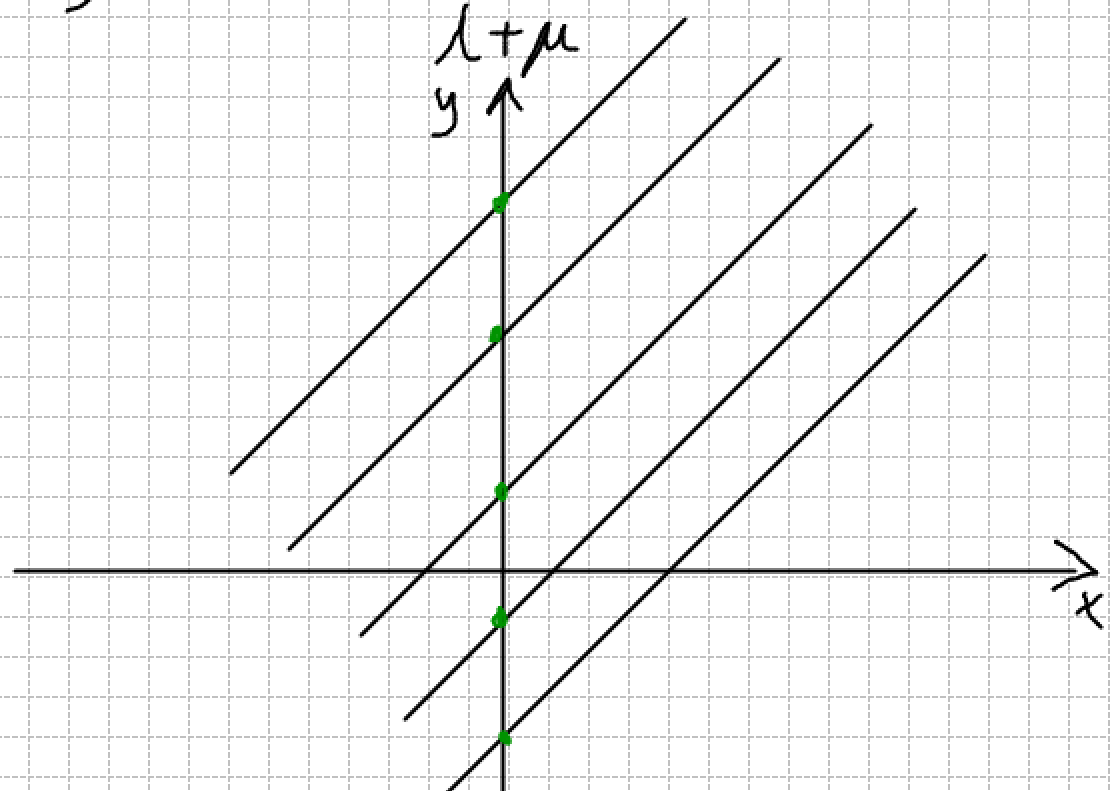
Un fascio di rette tutte parallele si dice fascio improprio:

$$\mathcal{F}_I: \lambda(y-mx+q_1)+\mu(y-mx+q_2)=0$$

$$(\lambda+\mu)y-m(\lambda+\mu)x+\lambda q_1+\mu q_2=0$$

se $\lambda+\mu\neq 0$ divido per $\lambda+\mu$ ed ho:

$$\mathcal{F}_I \quad y-mx+\frac{\lambda q_1+\mu q_2}{\lambda+\mu}=0$$



N521 PAG 231

Scrivere l'equazione del fascio di rette le cui generatrici hanno equazione: $r: 3x+2y-1=0$ e $s: 6x+4y+3=0$

Stabilisci che fascio è e determina l'eq. della retta di $\mathcal{F}$ che interseca asse y in $y_P=1$ $P(0;1)$

$m_r = -\frac{3}{2}$ $\quad m_s = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$\mathcal{F}_i$: $\lambda r + \mu s = 0 \Rightarrow \lambda(3x+2y-1)+\mu(6x+4y+3)=0$

$(3\lambda+6\mu)x+(2\lambda+4\mu)y-\lambda+3\mu=0$

$\overbrace{3(\lambda+2\mu)}^{a}x+\overbrace{2(\lambda+2\mu)}^{b}y\overbrace{-\lambda+3\mu}^{c}=0$ ⊛

$m_{\mathcal{F}_i} = -\frac{3\cancel{(\lambda+2\mu)}}{2\cancel{(\lambda+2\mu)}}$ con $\boxed{\lambda+2\mu\neq 0}$

se $\lambda+2\mu=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-2\mu}$

sostituisco in ⊛ $\lambda+2\mu=0$ ed ho

$0+0\boxed{-\lambda+3\mu=0}$

$\begin{cases}\lambda=-2\mu\\-\lambda+3\mu=0\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda=-2\mu\\2\mu+3\mu=0\end{cases}$ $\begin{cases}\lambda=0\\\mu=0\end{cases}$

$\mathcal{F}_i$ $\quad y=-\frac{3}{2}x+q \quad P(x_P=0 \quad y_P=1)$

$+1=-\frac{3}{2}0+q \qquad q=1$

$y=-\frac{3}{2}x+1$