PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia P(n) una proposizione (Proposizione: $1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, ovvero una affermazione per cui noi possiamo dire se è vera o falsa)

- $P(1)$ è vera
- $P(n)$ è vera

allora dimostriamo che $P(n+1)$ è vera $\Rightarrow$ P è una proposizione vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

Dimostrare che $\forall$ a positivo si ha

$$\boxed{(1+a)^n \geq 1+na} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione:

$P(1) \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1+1\cdot a$ VERA

$1+a = 1+a$

$\boxed{P(n)}$ VERA quindi suppongo che $\boxed{(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}$

Dimostro che è vera anche $P(n+1)$:

$P(n+1): \quad (1+a)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)a$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a)^1 \geq (1+na)\cdot(1+a) = 1+a+na+na^2 =$$

$$= 1+(n+1)a \underbrace{+na^2}_{\text{è sempre +}} \geq 1+(n+1)a$$

$$\underbrace{(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a}_{P(n+1)}$$

Quindi $P(n+1)$ è vera.

ESEMPIO

Dimostrare mediante il principio di induzione che

$$\boxed{1\times2\times3 + 2\times3\times5 + 3\times4\times7 + \dots + n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{2} n(n+1)^2(n+2) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}-\{0\}}$$

Dimostrazione $\qquad P(n)$

- $P(1): \quad 1(2)(3) = \dfrac{1}{\cancel{2}} 1(2)^{\cancel{2}}(3)$ VERA
- Supponiamo vera $P(n)$:

$$\boxed{1\times2\times3 + 2\times3\times5 + 3\times4\times7 + \dots + n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{2} n(n+1)^2(n+2) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}-\{0\}}$$

Dimostro che è vera $P(n+1)$:

$$\overbrace{1\times2\times3 + 2\times3\times5 + 3\times4\times7 + \dots + n(n+1)(2n+1)}^{P(n)} + (n+1)(n+2)(2n+3) \overset{?}{=}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)^2(n+3)$$

$$2n+3 = (2(n+1)+1)$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(2i+1)$$

ESEMPIO

Dimostriamo che $P(n)$: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ è vera!

- $P(1)$: $1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)}{2}$ $1 \overset{?}{=} \frac{2}{2}$ $1=1$ VERA!
- Supponiamo vera $P(n)$: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- Dimostro $P(n+1)$: $1+2+3+\dots+n+(n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\left[1+2+3+\dots+n\right]+(n+1) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+(n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\underbrace{1\times2\times3+2\times3\times5+3\times4\times7+\ldots+n(n+1)(2n+1)}_{P(n)}+(n+1)(n+2)(2n+3)=$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)+(n+1)(n+2)(2n+3)=$$

$$=(n+1)(n+2)\left[\frac{1}{2}n(n+1)+2n+3\right]=$$

$$=(n+1)(n+2)\left[\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+2n+3\right]=(n+1)(n+2)\left[\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{2}n+3\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(n^2+5n+6)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)(n+2)(n+3)=$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)^2(n+3)$$

CONTROESEMPIO

Dimostrare la veridicità della seguente proposizione:

$$P(n): \quad 2+4+6+\ldots+2n = (n+1)(n+2) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione:

$$P(1): \quad 2 = 2(1+2) \qquad \text{FALSA}.$$

La $P(n)$ **non è VERA**

ESEMPIO

$$\boxed{2^0+2^1+\dots+2^{n-1} = 2^n-1 \qquad P(n)}$$

Dimostrare che $P(n)$ è vera.

- $P(1)$: $\quad 2^0 = 2^1-1 \qquad 1 = 2-1 \qquad \boxed{1=1}$ VERA ($n=1$)
- Supponiamo vera $P(n)$: $2^0+2^1+\dots+2^{n-1} = 2^n-1$ vera
- Dimostro la veridicità di $P(n+1)$:

$$\boxed{2^0+2^1+\dots+2^{n-1}+2^{(n+1)-1} \stackrel{?}{=} 2^{(n+1)}-1 \qquad P(n+1)}$$

$$2^0+2^1+\dots+2^{n-1}+2^n \stackrel{?}{=} 2^{n+1}-1$$

$$\left[2^0+2^1+\dots+2^{n-1}\right]+2^n = \left[2^n-1\right]+2^n = 2\cdot 2^n-1 =$$

supposta $P(n)$ vera

$$2^n+2^n = 2^n(1+1) = 2^n\cdot 2^1 = 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1}-1.$$

$P(n+1)$ è vera!