

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia $P(n)$ una proposizione (Proposizione: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$; ovvero una affermazione per cui noi possiamo dire se è vera o falsa)

- $P(1)$ è vera.
- $P(n)$ è vera

allora dimostriamo che $P(n+1)$ è vera $\Rightarrow P$ è una proposizione vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

Dimostrare che $\forall a$ positivo si ha

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione:

$$P(1) \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1+1 \cdot a \quad \text{VERA}$$

$$P(n) \text{ VERA quindi suppongo che } (1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrare che è vera anche $P(n+1)$:

$$P(n+1): (1+a)^{n+1} \stackrel{?}{\geq} 1+(n+1)a$$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na) \cdot (1+a) = 1+a+na+na^2$$
$$= 1+(n+1)a + na^2 \geq 1+(n+1)a$$

è sempre +

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

Quindi $P(n+1)$ è vera.

$P(n+1)$

ESEMPIO

Dimostrare mediante il principio di induzione che

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 5 + 3 \times 4 \times 7 + \dots + n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{2} n(n+1)^2(n+2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Dimostrazione

$$P(1): 1(2)(3) = \frac{1}{2} 1(2)^2(3) \quad \text{VERA} \quad P(n)$$

Supponiamo vera $P(n)$:

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 5 + 3 \times 4 \times 7 + \dots + n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{2} n(n+1)^2(n+2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Dimostrare che è vera $P(n+1)$: $P(n+1)$

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 5 + 3 \times 4 \times 7 + \dots + n(n+1)(2n+1) + (n+1)(n+2)(2n+3) =$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(n+2)^2(n+3)$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^n i(i+1)(2i+1)$$

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 5 + 3 \times 4 \times 7 + \dots + n(n+1)(2n+1) + (n+1)(n+2)(2n+3) =$$

$P(n)$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)^2(n+2) + (n+1)(n+2)(2n+3) =$$

$$= (n+1)(n+2) \left[\frac{1}{2} n(n+1) + 2n+3 \right] =$$

$$= (n+1)(n+2) \left[\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + 2n + 3 \right] = (n+1)(n+2) \left[\frac{1}{2} n^2 + \frac{5}{2} n + 3 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(n+2) (n^2 + 5n + 6) = \frac{1}{2} (n+1)(n+2)(n+2)(n+3) =$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(n+2)^2(n+3)$$

CONTROESEMPIO

Dimostrare la veridicità della seguente proposizione:

$$P(n): 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n+1)(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione:

$$P(1): 2 = 2(1+2) \quad \text{FALSA}$$

La $P(n)$ non è VERA

ESEMPIO

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad P(n)$$

Dimostrare che $P(n)$ è vera.

- $P(1)$: $2^0 = 2^1 - 1 \quad 1 = 2 - 1 \quad \boxed{1 = 1}$ VERA
- Supponiamo vera $P(n)$: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ vera
- Dimostro la validità di $P(n+1)$:

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^{(n+1)-1} \stackrel{?}{=} 2^{(n+1)} - 1 \quad P(n+1)$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n \stackrel{?}{=} 2^{n+1} - 1$$

$$\left[2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} \right] + 2^n = \left[2^n - 1 \right] + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 =$$

$$= 2^{n+1} - 1.$$

$P(n+1)$ è vera!

Supposto $P(n)$ vera

$$2^n + 2^n = 2^n(1+1) \\ = 2^n \cdot 2^1 = 2^{n+1}$$