FUNZIONI CONTINUE

Def: Una funzione $y=f(x)$ è <u>continua</u> in $x_0 \in D_f$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Def: Una funzione $y=f(x)$ è <u>continua a sinistra</u> (a <u>destra</u>) in $x_0 \in D_f$ se

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0^{\pm})$$

OSSERVAZIONE Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari mediante operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non presenta problemi (denominatore $=0$, radici di argomenti <0, logaritmi di termini <0 ecc).

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{3^{2+\sin x+\log_3(1+\operatorname{tg} x)}}{\cos(\operatorname{arctg} x)}}_{f(x)} = \left[\frac{3^{2+0+0}}{1}\right] = 9$$

DISCONTINUITÀ

I SPECIE

Sia $y = f(x)$ una funzione e sia $x_0 \in D_f$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$ $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

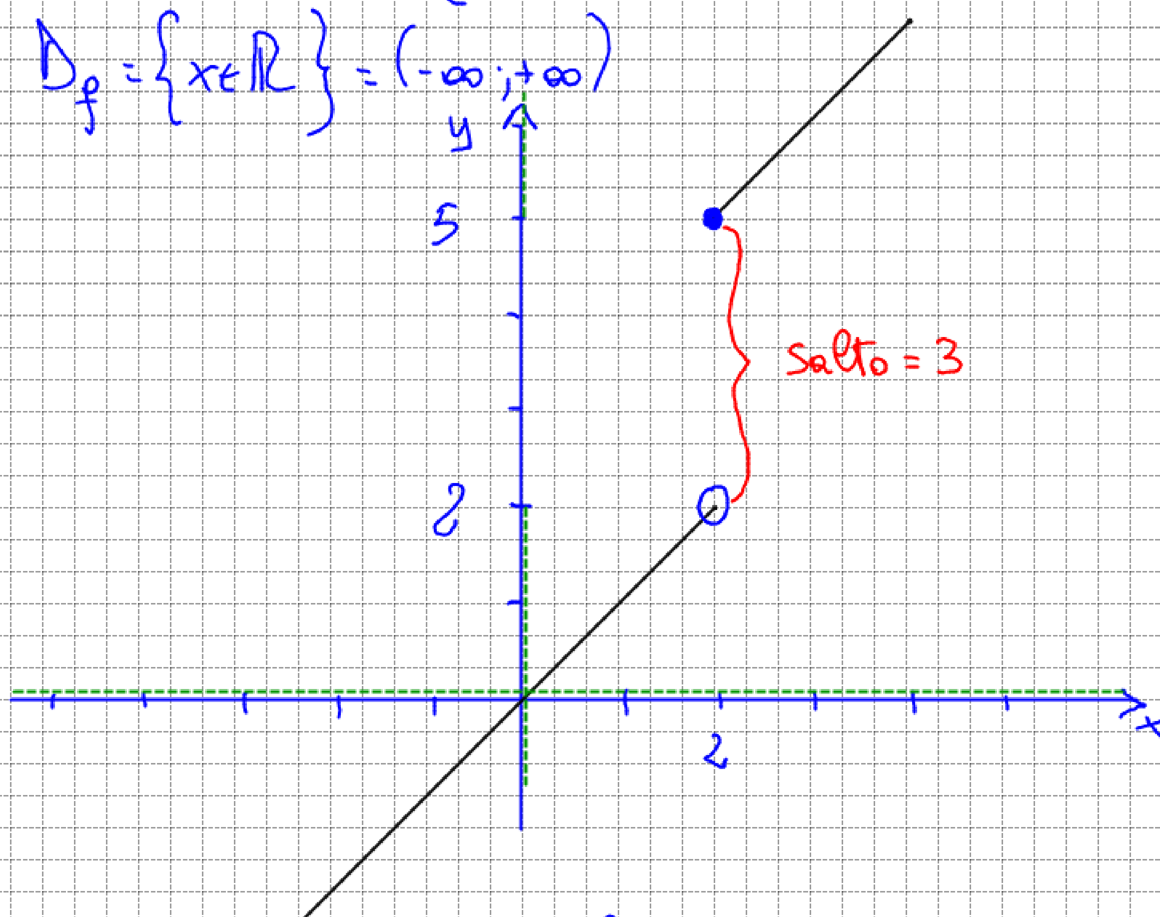
Allora la funzione $y = f(x)$ è discontinua in $x = x_0$ e

$$|l_2 - l_1| = \text{salto}$$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 2 \\ x+3 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty)$$



$f(2) = 2 + 3 = 5$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x = 2^-$

DISCONTINUITÀ DI I SPECIE
SALTO = 3

II SPECIE

Sia $y = f(x)$ una funzione, D_f il suo dominio e sia $x_0 \in D_f$. Allora se $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ valgono ∞ oppure non esistono (almeno uno dei due), la funzione nel punto ha una discontinuità di II SPECIE.

ESEMPIO

$$y = e^{\frac{1}{x}} \qquad D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \right] = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \infty \right] = +\infty$$

DISCONT. II SPECIE

III SPECIE (ELIMINABILE)

Sia $y = f(x)$ una funzione, D_f il suo dominio e x_0 un punto tale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e la funzione in x_0 o non esiste oppure $f(x_0) \neq l$. Allora la funzione $y = f(x)$ ha in x_0 una discontinuità di III SPECIE (ELIMINABILE).

ESEMPIO

$$y = \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \qquad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$$

La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$ tranne che per $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2} & \text{per } x \neq 2 \\ 8 & \text{per } x = 2 \end{cases}$$