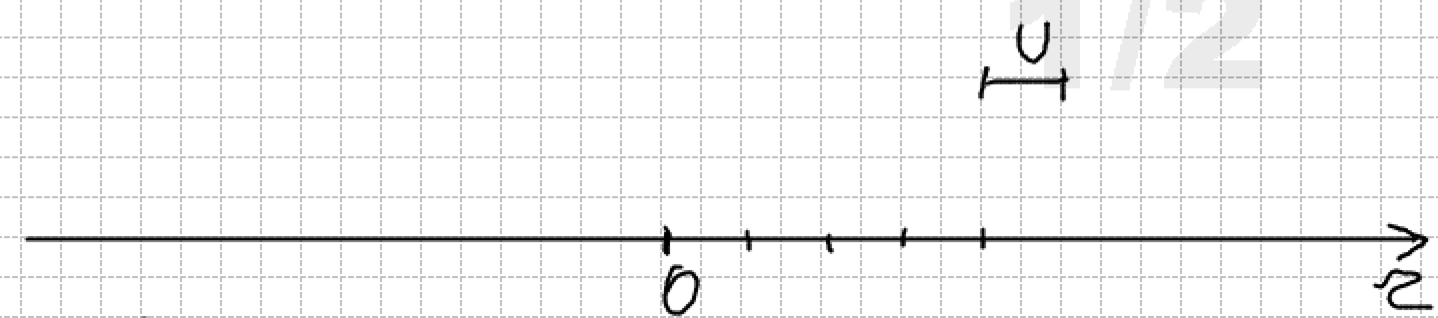
SEZIONI DI DEDEKIND



- $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ formato da tutti i punti razionali che si trovano su r
- $\mathbb{Q}$ non si può disegnare su r perché è formato da infiniti punti: $\mathbb{Q} \subset r$, $\exists$ punti di r che non sono elementi di $\mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q} \subsetneq r$

Consideriamo questi due insiemi: scelto $q \in \mathbb{Q}$

$A = \{ r \in \mathbb{Q} \,/\, r < q \}$ → i numeri razionali minori di q

$B = \{ r \in \mathbb{Q} \,/\, r > q \}$ → i numeri razionali maggiori di q.

Def: La coppia $\boxed{[A, B]}$ di semirette aperte, una "negativa" e l'altra "positiva" nel senso che una è illimitata nel verso negativo e l'altra è illimitata nel verso positivo, si dice una SEZIONE DI DEDEKIND (di $\mathbb{Q}$) se:

1. $A \cap B = \emptyset$
2. $A \cup B = \mathbb{Q} - \{q\}$ oppure $A \cup B = \mathbb{Q}$

Def: Un numero reale α è una sezione di Dedekind $[A,B]$ di $\mathbb{Q}$ e viceversa ogni sezione di Dedekind rappresenta un numero reale:

1) i numeri reali $\alpha = [A,B]$ con $A \cup B = \mathbb{Q} - \{q\}$ coincidono con q razionale.
2) i numeri reali $\alpha = [A,B]$ con $A \cup B = \mathbb{Q}$ rappresentano i numeri irrazionali.

ESEMPIO

Consideriamo il numero razionale $\frac{7}{8}$ e sia

$$A = \left\{ q \in \mathbb{Q} \,/\, q < \frac{7}{8} \right\} \qquad B = \left\{ q \in \mathbb{Q} \,/\, q > \frac{7}{8} \right\}$$

$[A,B]$ è una sezione di $\mathbb{Q}$, infatti:

1) $A \cap B = \phi$
2) $A \cup B = \mathbb{Q} - \left\{ \frac{7}{8} \right\}$

ESEMPIO

A è l'insieme dei razionali negativi, zero e i razionali positivi minori di 2

B è l'insieme dei razionali positivi maggiori di 2.

$[A,B]$ è una sezione di $\mathbb{Q}$ infatti

1) $A \cap B = \phi$
2) $A \cup B = \mathbb{Q}$

ORDINAMENTO IN $\mathbb{R}$

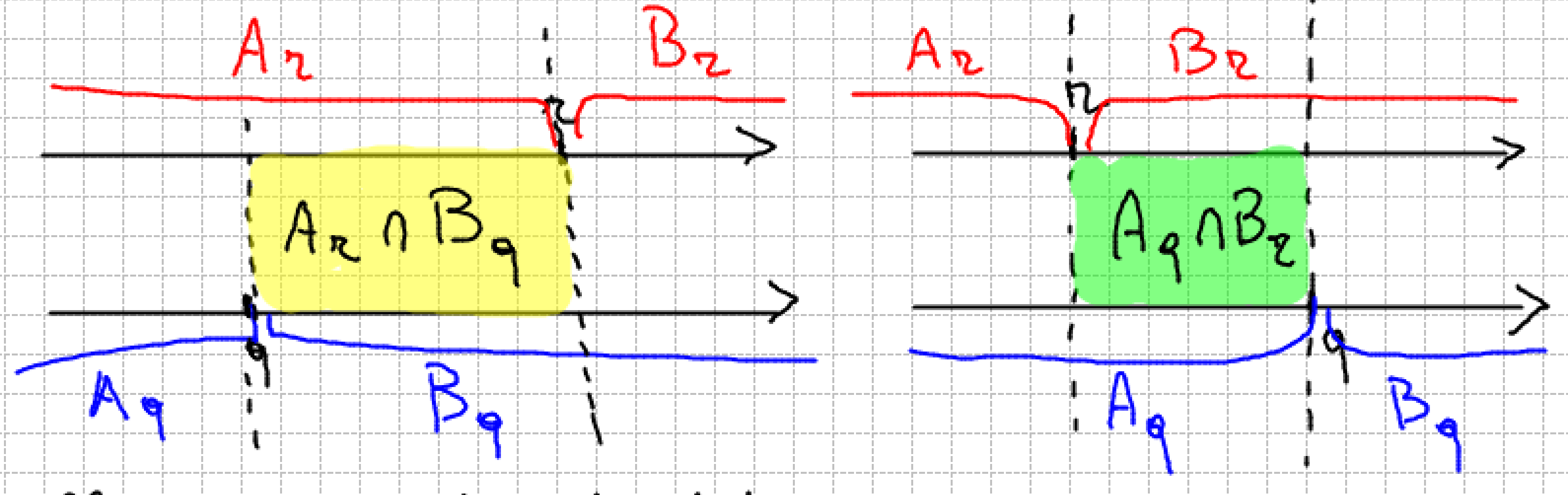
L'ordinamento in $\mathbb{R}$ avviene così:

siano $[A_q ; B_q]$ e $[A_r ; B_r]$

due sezioni di Dedekind dedotte da due numeri razionali q ed r.

$$A_q = \{ s \in \mathbb{Q} / s < q \} \qquad B_q = \{ s \in \mathbb{Q} / s > q \}$$
$$A_r = \{ t \in \mathbb{Q} / t < r \} \qquad B_r = \{ t \in \mathbb{Q} / t > r \}.$$

Se $q < r$ $\quad A_r \cap B_q \neq \phi$ $\qquad\qquad$ Se $q > r$ $\quad A_q \cap B_r \neq \phi$



allora si può dire che detti x, y numeri reali

$x = [A,B]$; $y = [C;D]$

1) $x = y$ se $A = C$ e $B = D$
2) $x < y$ se $B \cap C \neq \phi$
3) $x > y$ se $A \cap D \neq \phi$

$\mathbb{R}$ è TOTALMENTE ORDINATO.